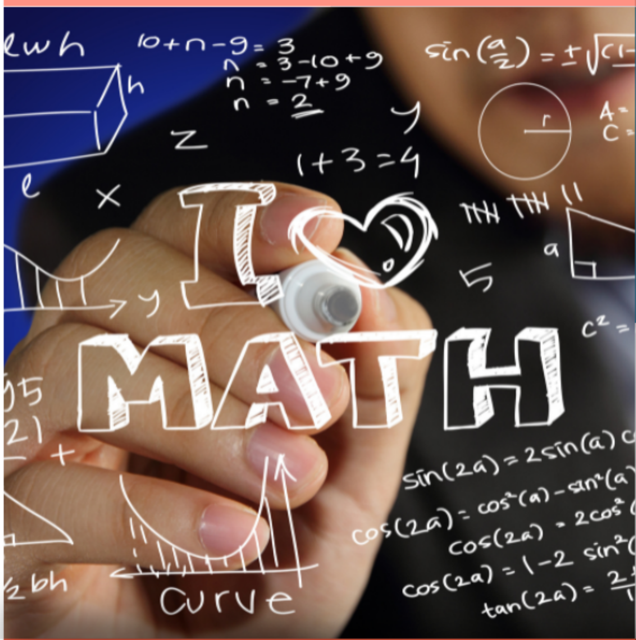
55th Anniversary
Faculty of Science
Prince of Songkla University

วิดยา
พาติว

อ.เอ้
รศ.ดร.สุภาวดี
พฤกษาพิทักษ์



Math is
fun.

ตรรกศาสตร์

1. ตรรกศาสตร์เบื้องต้น

รศ. ดร. สุภาวดี พฤกษาพิทักษ์
สาขาวิทยาศาสตร์การคำนวณ
คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์

วิดยา พาติว

อ. เอ้

ในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์พบว่าการใช้ถ้อยคำ ถือเป็นเรื่องสำคัญมากที่ต้องเลือกใช้อย่าง ชัดเจนและรัดกุม ถ้าจะกำหนดคำใหม่ขึ้นมาก็จะต้องมีการบอกความหมายให้ชัดเจนและ รัดกุมโดยเรียกว่าการนิยาม คำบางคำที่จะไม่นิยามเราเรียกว่า คำอนิยาม โดยเมื่อเราตกลงให้ คำบางคำเป็นคำอนิยามแล้วเราจะนิยามคำอื่น ๆ ได้โดยอาศัยคำอนิยาม ซึ่งเรียกว่า บทนิยาม นอกจากนี้ ข้อความที่สมมุติหรือตกลงกันว่าเป็นจริงโดยไม่พิสูจน์ เราเรียกว่า สัจพจน์

จากคำอนิยาม บทนิยาม และสัจพจน์ สามารถพิสูจน์ ทฤษฎีบท โดยอาศัยตรรกศาสตร์ เรียกสิ่งซึ่งประกอบด้วย คำอนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบทว่า โครงสร้างของระบบคณิตศาสตร์

ในบทนี้จะแนะนำเกี่ยวกับตรรกศาสตร์เบื้องต้นซึ่งเป็นพื้นฐานสำคัญที่จะช่วยในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ให้ได้ผลดียิ่งขึ้น

1.1 ประพจน์

ประพจน์ คือ ประโยคหรือข้อความที่มีค่าความจริงหรือเท็จอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น เรานิยมแทนประพจน์ด้วยอักษรตัวพิมพ์เล็ก เช่น p, q, r, s

ค่าความจริงของประพจน์มี 2 แบบด้วยกัน คือ

1. ค่าความจริงของประพจน์ที่เป็น จริง เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ T (True) เช่น p มีค่าความเป็นจริงเป็นจริง เขียนแทนด้วย $p \equiv T$
2. ค่าความจริงของประพจน์ที่เป็น เท็จ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ F (False) เช่น p มีค่าความเป็นจริงเป็นเท็จ เขียนแทนด้วย $p \equiv F$

ตัวอย่าง 1.1 จงพิจารณาว่าประโยคหรือข้อความต่อไปนี้เป็นประพจน์หรือไม่ ถ้าเป็นจงบอกค่าความจริงของประพจน์

1. $1 = 2 - 1$
2. สมชายเป็นคนดี
3. ฝนตกหรือเปล่า
4. ช่วยด้วย
5. 4 เป็นจำนวนเฉพาะ
6. อย่ามายุ่งกับฉัน
7. ปีนี้ทำนายว่า อาหารจะอุดมสมบูรณ์
8. เดือนสิงหาคมมี 31 วัน
9. โทรได้ไม่อั้น

1.2 ตารางค่าความจริง

ตารางค่าความจริง (Truth Table) คือตารางที่แสดงค่าความจริงที่เป็นไปได้ทั้งหมดของประพจน์

ตัวอย่าง 1.2

1.3 การเชื่อมประพจน์

ตัวเชื่อมทางตรรกศาสตร์มี 4 ชนิดด้วยกัน คือ

1. ตัวเชื่อม "และ" (and) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ " $\wedge$" กล่าวคือ $p \wedge q$ หมายถึง p และ q
2. ตัวเชื่อม "หรือ" (or) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ "$\vee$ " กล่าวคือ $p \vee q$ หมายถึง p หรือ q
3. ตัวเชื่อม "ถ้า...แล้ว" (If ...then) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ "$\rightarrow$ " กล่าวคือ $p \rightarrow q$ หมายถึง ถ้า p แล้ว q
4. ตัวเชื่อม "ก็ต่อเมื่อ" (if and only if) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ "$\leftrightarrow$" กล่าวคือ $p \leftrightarrow q$ หมายถึง p ก็ต่อเมื่อ q

ข้อความทางคณิตศาสตร์ที่เป็นบทนิยามต่าง ๆ ถ้านำมาเขียนเป็นประโยคที่มีตัวเชื่อมจะมีความหมายเดียวกับการใช้ตัวเชื่อม ก็ต่อเมื่อ เช่น
รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านเท่ากันสองด้าน หมายความว่า รูปสามเหลี่ยมใดจะเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ก็ต่อเมื่อ รูปสามเหลี่ยมนั้นมีด้านเท่ากันสองด้าน

นอกเหนือจากตัวเชื่อมแล้ว ยังมีนิเสธของประพจน์

นิเสธ ของประพจน์ p เขียนแทนด้วย $\sim p$ หมายถึง ประพจน์ ที่มีค่าความจริงตรงกันข้ามกับค่าความจริงของประพจน์ p

ข้อตกลงของประพจน์ใหม่ในกรณีที่เชื่อมด้วยตัวเชื่อมต่าง ๆ มีดังนี้

1. $p \wedge q$ เป็นจริงในกรณีที่ $p \equiv q \equiv T$ กรณีอื่น ๆ เป็นเท็จทุกกรณี
2. $p \vee q$ เป็นเท็จในกรณีที่ $p \equiv q \equiv F$ กรณีอื่น ๆ เป็นจริงทุกกรณี
3. $p \rightarrow q$ เป็นเท็จในกรณีที่ $p \equiv T$ และ $q \equiv F$ เท่านั้น กรณีอื่น ๆ เป็นจริงทุกกรณี
4. $p \leftrightarrow q$ เป็นจริงในกรณีที่ $p \equiv q \equiv T$ หรือ $p \equiv q \equiv F$ กรณีอื่น ๆ เป็นเท็จทุกกรณี

ตารางค่าความจริงของทั้ง 5 กรณี แสดงได้ดังนี้

p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$

ตัวอย่าง 1.3 กำหนดให้ p เป็นประพจน์ใด ๆ จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

1. $p \wedge T \equiv$ ....
2. $p \wedge F \equiv$ ....
3. $p \wedge p \equiv$ ....
4. $p \wedge \sim p \equiv$ ....
5. $p \vee T \equiv$ ....
6. $p \vee F \equiv$ ....
7. $p \vee p \equiv$ ....
8. $p \vee \sim p \equiv$ ....
9. $T \rightarrow p \equiv$ ....
10. $F \rightarrow p \equiv$ ....
11. $p \rightarrow T \equiv$ ....
12. $p \rightarrow F \equiv$ ....
13. $p \rightarrow p \equiv$ ....
14. $p \rightarrow \sim p \equiv$ ....
15. $T \leftrightarrow p \equiv$ ....
16. $F \leftrightarrow p \equiv$ ....
17. $p \leftrightarrow p \equiv$ ....
18. $\sim p \leftrightarrow p \equiv$ ....

ตัวอย่าง 1.4 กำหนดให้ p, r เป็นจริง และ q เป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของรูปแบบประพจน์ต่อไปนี้

1. $[(p \wedge s) \vee (p \wedge r)] \rightarrow (p \vee s)$

2. $[(q \to s) \vee r] \vee [(q \leftrightarrow s) \wedge r]$

3. $[(r \leftrightarrow q) \vee (p \to q)] \to (p \vee \sim q)$

4. $[(p \leftrightarrow q) \vee (q \to r)] \vee \sim s$

ตัวอย่าง 1.5 กำหนดให้ p, q, r และ s เป็นประพจน์ที่มีความจริงเป็น จริง เท็จ เท็จ และ จริง ตามลำดับ จงหาค่าความจริงของประพจน์ $[(p \wedge q) \vee r] \to (p \vee s)$

ตัวอย่าง 1.6 กำหนดให้ $[(p \to q) \wedge (p \vee r)] \to (s \to r)$ เป็นเท็จ ข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด

1. $[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)] \vee (r \leftrightarrow s)$ เป็นเท็จ

2. $[(\sim p \wedge q) \to (\sim q \wedge r)] \to (\sim r \wedge s)$ เป็นจริง

การหาค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อมตั้งแต่สองตัวขึ้นไป จะหาค่าความจริงของประพจน์ย่อยในวงเล็บก่อน แต่ถ้าประพจน์นั้นไม่ได้ใส่วงเล็บ ให้หาค่าของตัวเชื่อม $\sim$ ก่อนแล้วหาค่าความจริงของตัวเชื่อม $\wedge, \vee$ จากนั้นจึงหาค่าความจริงของตัวเชื่อม $\to$ และลำดับสุดท้ายเป็นการหาค่าของความจริงของตัวเชื่อม $\leftrightarrow$

1.4 การสร้างตารางค่าความจริง

ตัวอย่าง 1.7 กำหนดให้ p และ q เป็นประพจน์ จงสร้างตารางค่าความจริงของ

$$(p \to q) \to (\sim p \wedge \sim q)$$

p	q	$p \to q$	$\sim p \wedge \sim q$	$(p \to q) \to (\sim p \wedge \sim q)$

1.5 รูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกัน

ในวิชาตรรกศาสตร์ ถ้ารูปแบบของประพจน์สองรูปแบบใดมีค่าความจริงตรงกันกรณีต่อกรณี แล้วจะสามารถนำไปใช้แทนกันได้ เรียกสองรูปแบบของประพจน์ดังกล่าวว่า ....

ตัวอย่าง 1.8 จงสร้างตารางแสดงค่าความจริงของ $p \to q$ และ $\sim p \vee q$

p	q	$p \to q$	$\sim p \vee q$

ตัวอย่าง 1.9 จงสร้างตารางแสดงค่าความจริงของ $\sim (p \vee q)$ และ $\sim p \wedge \sim q$

p	q	$\sim (p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$

ตัวอย่าง 1.10 จงสร้างตารางแสดงค่าความจริงของ $p \to q$ และ $\sim q \to \sim p$

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim q \rightarrow \sim p$

ตัวอย่าง 1.11 จงสร้างตารางแสดงค่าความจริงของ $p \leftrightarrow q$ และ $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

p	q	$p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow) \wedge (q \rightarrow p)$

การตรวจสอบว่ารูปแบบประพจน์ 2 รูปแบบสมมูลกันหรือไม่ สามารถทำได้ 2 วิธีคือ

1. โดยการเขียนตารางแสดงค่าความจริง
2. โดยใช้รูปแบบประพจน์ที่สมมูลกันที่ทราบอยู่ก่อนมาพิจารณา

รูปแบบประพจน์ที่สมมูลกันที่ควรทราบ

1. การแจกแจง

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

2. การเปลี่ยนตัวเชื่อม

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

3. การเติมนิเสธ

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

ตัวอย่าง 1.12 จงพิจารณาว่ารูปแบบของประพจน์ต่อไปนี้สมมูลกับรูปแบบของประพจน์ในข้อใด

1. $(p \wedge q) \rightarrow r$

   (a) $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$ (b) $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

2. $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

   (a) $\sim (p \vee q) \rightarrow r$ (b) $\sim (p \vee q) \vee r$

1.6 สัจนิรันดร์

บทนิยาม 1.1 รูปแบบของประพจน์ที่มีค่าความจริงทุกกรณี เรียกว่า **สัจนิรันดร์**

ตัวอย่าง 1.13 จงพิจารณาค่าความจริงของประพจน์ $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$

p	q	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow p$

การตรวจสอบความเป็นสัจนิรันดร์ของประพจน์
สามารถทำได้ 2 วิธีได้แก่

1. พิจารณาจากตารางแสดงค่าความจริงของประพจน์
2. วิธีการหาข้อขัดแย้ง โดยวิธีนี้ จะสมมุติให้รูปแบบของประพจน์ที่กำหนดให้เป็นเท็จ หากมีข้อขัดแย้งกับที่สมมตีไว้ แสดงว่ารูปแบบของประพจน์นั้น เป็นสัจนิรันดร์
   และถ้าไม่มีข้อขัดแย้งกับที่สมมตีไว้ แสดงว่ารูปแบบของประพจน์นั้นไม่เป็นสัจนิรันดร์

ตัวอย่าง 1.14 จงตรวจสอบว่ารูปแบบของประพจน์ $[(p \to q) \wedge p] \to \sim q$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

ตัวอย่าง 1.15 ประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

1. $(p \to q) \to [(p \vee q) \to r]$

2. $(p \vee q) \to [(p \wedge q) \to r]$

3. $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$

4. $[(p \to r) \wedge (q \to r)] \to [(p \wedge q) \to r]$

5. $[(p \to r) \land (q \to s) \land (p \land q)] \to (r \lor s)$

6. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(q \lor r) \lor (p \lor q)]$

1.7 การอ้างเหตุผล

การอ้างเหตุผลคือ การอ้างว่า เมื่อมีข้อความ $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ ชุดหนึ่ง แล้วสามารถสรุป ข้อความ q ได้ การอ้างเหตุผลประกอบด้วยส่วนสำคัญ 2 ส่วนคือ

- เหตุ/ข้อความ เช่น $p_1, p_2, \ldots, p_n$
- ผล/ข้อสรุป เช่น q

การอ้างเหตุผลอาจจะสมเหตุสมผลหรือไม่สมเหตุสมผลก็ได้ ซึ่งสามารถตรวจสอบได้โดยใช้ตัวเชื่อม $\wedge$ เชื่อมเหตุทั้งหมดเข้าด้วยกัน และใช้ ตัวเชื่อม $\rightarrow$ เชื่อส่วนที่เป็นเหตุกับผลดังนี้

$$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n \rightarrow q$$

และเราสามารถสรุปว่าการอ้างเหตุผลนี้สมเหตุสมผลหรือไม่โดยพิจารณาจาก
ความเป็นสัจนิรันดร์ของ $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n \rightarrow q$

ความเป็นสัจนิรันดร์ของ $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n \rightarrow q$	ผลสรุป
เป็นสัจนิรันดร์	การอ้างสมเหตุสมผล
ไม่เป็นสัจนิรันดร์	การอ้างไม่สมเหตุสมผล

ตัวอย่าง 1.16 การอ้างอเหตุผลต่อไปนี้ สมเหตุสมผลหรือไม่

1. เหตุ 1) $p \wedge q$
   2) $\sim p \vee r$
   3) $\sim r$
   ผลสรุป q

   การอ้างเหตุผลนี้ ....

2. เหตุ 1) ถ้า อ่าวคุยในห้อง แล้ว เรนน์คุยในห้อง
   2) ถ้า เรนน์คุยในห้อง แล้ว จะยุติการสอบ
   3) ไม่มีการยุติการสอบ
   ผลสรุป อ่าวไม่คุยในห้อง

   การอ้างเหตุผลนี้ ....

3. เหตุ 1) ถ้าสมชายขยันแล้วเขาจะสอบได้
   2) ถ้าสมชายไม่ขยันแล้วพ่อแม่จะเสียใจ
   3) สมชายสอบไม่ได้

   ผลสรุป พ่อแม่เสียใจ

   การอ้างเหตุผลนี้ ....

4. เหตุ 1) $p \to q$
   2) $q \to s$
   3) $\sim s$

   ผลสรุป $\sim p$

   การอ้างเหตุผลนี้ ....

5. เหตุ 1) $p \to (r \vee s)$

   ผลสรุป $\sim p \vee (r \vee s)$

   การอ้างเหตุผลนี้ ....

การทดสอบการอ้างเหตุผล สามารถทำได้โดยการเทียบกับรูปแบบที่พบบ่อย ยกตัวอย่างเช่น

1. *ถ้า ... แล้ว*
   เหตุ
   1. $p \to q$
   2. p

   ผล q
2. *หรือ*
   เหตุ
   1. $p \vee q$
   2. $\sim p$

   ผล q
3. *และ*
   เหตุ
   1. $p \wedge q$

   ผล p

เหตุ
1. $p \wedge q$
ผล q

4. *การถ่ายทอด*
เหตุ
1. $p \rightarrow q$
2. $q \rightarrow r$
ผล $p \rightarrow r$

5. *เติม " หรือ "*
เหตุ
1. p
ผล $p \vee q$

1.8 ประโยคเปิด

บทนิยาม 1.2 **ประโยคเปิด** คือ ประโยคบอกเล่าหรือประโยคปฏิเสธที่มีตัวแปรและเมื่อแทนตัวแปรด้วยสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์แล้วได้ประพจน์

ตัวอย่าง 1.17 ประโยคใดต่อไปนี้เป็นประโยคเปิด

1. $2x + 1 = 3$
2. $x > 1$
3. $x^2 - 1$
4. $1 < 5$

- *สัญลักษณ์แทนประโยคเปิดใดๆ ที่มี* x *เป็นตัวแปร เขียนแทนด้วย* $P(x)$
- *ประโยคเปิดสามารถเชื่อมกันได้ด้วย* ....
- *รูปแบบประพจน์ที่สมมูลกัน เมื่อเขียนเป็นประโยคเปิดก็จะยังคงสมมูลกันด้วย*

1.9 ตัวบ่งปริมาณ

ในวิชาคณิตศาสตร์จะพบว่ามีการใช้ข้อความ

- สำหรับ x ทุกตัว
- สำหรับ x บางตัว

เราเรียกข้อความที่บ่งบอกปริมาณของค่าตัวแปร x ว่า ตัวบ่งปริมาณ (Quantifier) และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ต่อไปนี้

ตัวบ่งปริมาณ	สัญลักษณ์
มีบางตัว (for some)	
สำหรับทุกตัว (for all)	

ตัวอย่าง 1.18 จงเขียนข้อความต่อไปนี้ในรูปสัญลักษณ์ เมื่อเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง

1. สำหรับ x ทุกจำนวน $x+x=2x$
2. มีจำนวนจริง x ซึ่ง $x+0=2x$
3. สำหรับ x ทุกจำนวน ถ้า x เป็นจำนวนเต็ม แล้ว x เป็นจำนวนจริง
4. จำนวนจริงทุกจำนวนเป็นจำนวนเต็ม
5. จำนวนเต็มบางจำนวนยกกำลังสองแล้วเท่ากับ 1

1. การเขียนสัญลักษณ์แทนประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ จะต้องเขียนเอกภพสัมพัทธ์กำกับไว้เสมอ
2. ถ้าในกรณีที่เอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง มักนิยมละการเขียนเอกภพสัมพัทธ์

ตัวอย่าง 1.19 จงเขียนข้อความต่อไปนี้ในรูปสัญลักษณ์ เมื่อ A, B เป็นเซตใด ๆ

1. $A = B$ ก็ต่อเมื่อ สมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B และสมาชิกทุกตัวของ B เป็นสมาชิกของ A
2. $A \not\subset B$ ก็ต่อเมื่อ มีสมาชิกบางตัวของ A ไม่เป็นสมาชิกของ B

1.10 ค่าความจริงของประโยคเปิดที่มีตัวบ่งปริมาณตัวเดียว

บทนิยาม 1.3 บทนิยามของค่าความจริงของประโยคเปิดที่มีตัวบ่งปริมาณตัวเดียวเป็นดังนี้

1. $\forall x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง ก็ต่อเมื่อ แทน x ทุกตัวในเอกภพสัมพัทธ์ลงใน $P(x)$ แล้วได้ค่าความจริงเป็นจริง
2. $\forall x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ ก็ต่อเมื่อ แทน x บางตัวในเอกภพสัมพัทธ์ลงใน $P(x)$ แล้วได้ค่าความจริงเป็นเท็จ
3. $\exists x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง ก็ต่อเมื่อ แทน x บางตัวในเอกภพสัมพัทธ์ลงใน $P(x)$ แล้วได้ค่าความจริงเป็นจริง
4. $\exists x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ ก็ต่อเมื่อ แทน x ทุกตัวในเอกภพสัมพัทธ์ลงใน $P(x)$ แล้วได้ค่าความจริงเป็นเท็จ

ตัวอย่าง 1.20 จงหาค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณต่อไปนี้ เมื่อ $\mathcal{U} = \{-1, 0, 1\}$

1. $\forall x[(x < 0) \to (x^2 > 0)]$

x	$x < 0$	$x^2 > 0$	$x < 0 \to x^2 > 0$

2. $\forall x[(x < 0)] \to \forall x[(x^2 > 0)]$

3. $\exists x[(x < 0) \wedge (x - 1 = 0)]$

x	$x < 0$	$x - 1 = 0$	$(x < 0) \wedge (x - 1 = 0)$

4. $\exists x[x < 0] \wedge \exists x[x - 1 = 0]$

ตัวอย่าง 1.21 ให้ $\mathcal{U} = \{-2, 0, 1, 1.5, 2\}$ ข้อความต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นอย่างไร

1. $\exists x$[x เป็นจำนวนเฉพาะ และ x เป็นจำนวนคี่]
2. $\exists x$[x เป็นจำนวนเฉพาะ หรือ x เป็นจำนวนคี่]
3. $\forall x$[x เป็นจำนวนเฉพาะ และ x เป็นจำนวนคี่]
4. $\forall x$ [ถ้า x เป็นจำนวนนับ แล้ว $x + 3$ เป็นจำนวนเฉพาะ]
5. $\forall x$ [ถ้า $x + 3$ เป็นจำนวนเฉพาะ แล้ว x เป็นจำนวนนับ]

ตัวอย่าง 1.22 จงหาค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณต่อไปนี้ เมื่อ $\mathcal{U} = \{-1, 0, 1\}$

1. $\exists x(x^2 \neq 0) \to \forall x(x^2 \neq 1)$
2. $\exists x(x + 1 > 0) \wedge \exists x[(x^2 \neq 1)]$
3. $\exists x[(x + 1 > 0) \wedge x^2 \neq 1]$
4. $\forall x(x^2 > 0 \vee x = 0)$

ตัวอย่าง 1.23 จงพิสูจน์ว่าเซตว่างเป็นสับเซตของทุก ๆ เซต

1.11 สมมูลและนิเสธของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ

1. เมื่อเปลี่ยนประพจน์ที่สมมูลกันเป็นประโยคเปิด ก็จะได้ประโยคเปิดที่สมมูลกันด้วย

ตัวอย่าง 1.24 กำหนดให้ $\mathrm{P}(x)$ และ $Q(x)$ เป็นประโยคเปิด ประโยค

$$\forall x[\mathrm{P}(x)] \to \exists x[\sim Q(x)]$$

สมมูลกับประโยคในข้อใดต่อไปนี้

1. $\forall x[\sim \mathrm{P}(x)] \to \exists x[Q(x)]$
2. $\forall x[Q(x)] \to \exists x[\sim \mathrm{P}(x)]$
3. $\exists x[\mathrm{P}(x)] \to \forall x[Q(x)]$
4. $\exists x[\sim Q(x)] \to \forall x[\mathrm{P}(x)]$

2. การหานิเสธของข้อความที่เป็นประโยคเปิดกับตัวบ่งปริมาณ นั่นคือ ข้อความที่มีค่าความจริงตรงกันข้ามกับข้อความเดิมเสมอ โดยมีหลักการอยู่ว่า

ประโยคเปิดและตัวบ่งปริมาณ	นิเสธของประโยคเปิดและตัวบ่งปริมาณ
$\forall x[p(x)]$	$\sim \forall x[p(x)] \equiv \exists x[\sim p(x)]$
$\exists x[p(x)]$	$\sim \exists x[p(x)] \equiv \forall x[\sim p(x)]$

ตัวอย่าง 1.25 จงหานิเสธของข้อความต่อไปนี้

1. $\forall x[x+3>5]$

2. จำนวนจริงทุกจำนวนเป็นจำนวนคี่

3. $\exists x[x^2 < 0]$

4. มีจำนวนจริงบางจำนวนเป็นจำนวนคู่

5. $\forall x[x < 0] \vee \exists x[x^2 < 0]$

6. $\forall x[x \neq 0] \rightarrow \exists x[x \neq 0]$

7. $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$

1.12 แบบฝึกหัด

1. กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์คือเซตของจำนวนจริง และให้ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นประโยคเปิด ถ้า $\forall x[P(x)] \wedge \forall x[\sim Q(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง แล้ว ประโยคในข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นเท็จ
   1. $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$
   2. $\exists x[\sim P(x) \vee \sim Q(x)]$
   3. $\exists x[P(x) \wedge \sim Q(x)]$
   4. $\forall x[P(x) \rightarrow \sim Q(x)]$

2. กำหนดให้ p และ q เป็นประพจน์ใดๆ ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์
   1. $\sim p \vee (\sim p \wedge q)$
   2. $(q \vee \sim q) \wedge (p \rightarrow \sim q)$
   3. $\sim (p \rightarrow \sim q) \rightarrow q$
   4. $(\sim p \vee q) \rightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
   5. $(\sim p \wedge q) \rightarrow (\sim q \wedge p)$

3. กำหนดให้ p, q และ r เป็นประพจน์ โดยที่ $(p \vee r) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง
   1. $(q \leftrightarrow r) \vee p$ มีค่าความจริงเป็นจริง
   2. $(p \rightarrow q) \vee (r \rightarrow p)$ มีค่าความจริงเป็นจริง
   3. $(r \rightarrow q) \wedge (p \wedge q)$ มีค่าความจริงเป็นจริง
   4. $(q \rightarrow p) \vee (q \wedge r)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ
   5. $(r \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow \sim r)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

4. กำหนดให้ p, q, r, s และ t เป็นประพจน์ซึ่ง $p \rightarrow (q \wedge r)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ และ $p \leftrightarrow (s \vee t)$ มีค่าความจริงเป็นจริง ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นจริง
   1. $(q \wedge s) \rightarrow (p \wedge q)$
   2. $(s \wedge t) \rightarrow \sim q$
   3. $(q \vee s) \leftrightarrow p$
   4. $(p \rightarrow r) \rightarrow s$

5. กำหนดให้ p, q และ r เป็นประพจน์ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้
   (ก) ประพจน์ $p \rightarrow (p \rightarrow (q \vee r))$ สมมูลกับประพจน์ $p \rightarrow (q \vee r)$
   (ข) ประพจน์ $p \wedge (q \rightarrow r)$ สมมูลกับประพจน์ $(q \rightarrow p) \vee \sim (p \rightarrow \sim r)$
   ข้อใดต่อไปนี้ถูก
   1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก
   2. (ก) ถูก และ (ข) ผิด
   3. (ก) ผิด และ (ข) ถูก
   4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

6. กำหนดให้ p, q, r และ s เป็นประพจน์ใดๆ ประพจน์ $[(p\wedge \sim q)\vee \sim p] \rightarrow [(r\vee s)\wedge(r\vee \sim s)]$ สมมูลกับประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้
   1. $p \rightarrow r$
   2. $q \rightarrow r$
   3. $(p\vee r)\wedge(q\vee r)$
   4. $(q\vee r)\wedge(q\vee s)$

7. กำหนดให้ A, B, C เป็นประพจน์ใดๆ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง
   1. ถ้า $A \leftrightarrow B$ มีค่าความจริงเป็นจริง แล้ว $(B\wedge C) \rightarrow (\sim A \rightarrow C)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ
   2. ประพจน์ $A \rightarrow [(A\wedge B)\vee(B\vee C)]$ เป็นสัจนิรันดร์
   3. ประพจน์ $[(A\wedge B)\rightarrow C] \rightarrow [(A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C)]$ เป็นสัจนิรันดร์
   4. ประพจน์ $(A\rightarrow C)\wedge(B\rightarrow C)$ สมมูลกับประพจน์ $(A\wedge B)\rightarrow C$

8. กำหนดให้ p, q และ r เป็นประพจน์ใดๆ พิจารณาประพจน์ต่อไปนี้

   (ก) $(\sim p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow p)$ เป็นสัจนิรันดร์

   (ข) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \wedge q)$ ไม่เป็นสัจนิรันดร์

   (ค) $(p \rightarrow q) \vee (\sim r \rightarrow \sim q)$ สมมูลกับ $p \rightarrow r$

   ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง
   1. ข้อ (ก) และ (ข) ถูก แต่ (ค) ผิด
   2. ข้อ (ก) และ (ค) ถูก แต่ (ข) ผิด
   3. ข้อ (ข) และ (ค) ถูก แต่ (ก) ผิด
   4. ข้อ (ก) (ข) และ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
   5. ข้อ (ก) (ข) และ (ค) ผิดทั้งสามข้อ