แคลคูลัส 1

Calculus I

โครงการตำรา คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

แคลคูลัส 1 (Calculus I)

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

พิมพ์ครั้งที่ 2 พ.ศ. 2561 จำนวน 3,000 เล่ม

ข้อมูลทางบรรณานุกรมหนังสือ

มหาวิทยาลัยศิลปากร. ภาควิชาคณิตศาสตร์

แคลคูลัส 1 (Calculus I) / ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร ; คณะผู้เรียบเรียง, ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ...[และคนอื่น ๆ]. นครปฐม : โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยศิลปากร, 2559.

313 หน้า : ภาพประกอบ

ISBN 978-974-641-593-4

1. แคลคูลัส. (1) ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ. (2) ชื่อเรื่อง.

QA300 ม56

จัดพิมพ์โดย ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร
อำเภอเมืองนครปฐม จังหวัดนครปฐม 73000 โทรศัพท์ 0-3424-5320-1 โทรสาร 0-3427-3042

พิมพ์ที่ โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยศิลปากร อำเภอเมืองนครปฐม จังหวัดนครปฐม 73000 โทรศัพท์ 0-3425-5814

แคลคูลัส 1

Calculus I

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยศิลปากร

คณะผู้เรียบเรียง

ศาสตราจารย์ ดร.ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ

รองศาสตราจารย์ ดร.นวรัตน์ อนันต์ชื่น

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.นพดล ชุมชอบ

อาจารย์ ดร.วรกฤษณ์ ศุภพร

อาจารย์ธนิญฐอร ห้าวสุด

คณะบรรณาธิการ

รองศาสตราจารย์ ดร.นวรัตน์ อนันต์ชื่น

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.มาลินี ชัยยะ

อาจารย์ ดร.จิตติศักดิ์ รักบุตร

อาจารย์ ดร.รัตนา ศรีทัศน์

คำนำ

ภาควิชาคณิตศาสตร์ได้มอบหมายให้คณะบรรณาธิการรวบรวม เรียบเรียงและปรับปรุงตำราแคลคูลัส 1 จากเอกสารประกอบการสอนซึ่งเป็นผลงานการเขียนที่ผ่านมาร่วมสิบปีของคณาจารย์ในภาควิชา ฯ เพื่อใช้ประกอบการเรียนการสอนในรายวิชา 511 101 แคลคูลัส 1 และ รายวิชา 511 104 แคลคูลัสสำหรับวิศวกร 1 โดยเนื้อหาในตำราเล่มนี้ประกอบไปด้วยเรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่อง อนุพันธ์ การประยุกต์ของอนุพันธ์ กฎของโลปิตาล และ ลำดับ อนุกรม และอนุกรมกำลังของจำนวนจริง และเพื่อเป็นการทบทวนความรู้พื้นฐานในการศึกษารายวิชาดังกล่าวนี้ คณะบรรณาธิการได้ใส่เนื้อเรื่องที่เป็นความรู้พื้นฐานไว้ในภาคผนวก 1 เพื่อให้ง่ายและสะดวกสำหรับนักศึกษาในการศึกษาทบทวนด้วยตนเอง สำหรับในภาคผนวก 2 คณะบรรณาธิการได้ใส่เฉลยแบบฝึกหัดไว้ให้เพื่อให้นักศึกษาใช้เป็นเครื่องมือในการตรวจสอบการทำแบบฝึกหัด

การจัดทำตำราฉบับนี้ลุล่วงไปได้ด้วยดีด้วยทุนสนับสนุนการเขียนตำราจากกองทุนวิจัยและสร้างสรรค์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร และการสนับสนุนในด้านต่าง ๆ จากภาควิชา ฯ ตลอดจนความร่วมมือและร่วมใจของคณาจารย์ในภาควิชา ฯ และนักศึกษาทั้งที่เป็นผู้เรียนและที่เป็นผู้สอนทบทวนที่ให้ข้อเสนอแนะและช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเอกสาร และท้ายสุดด้วยความกรุณาของท่านผู้ทรงคุณวุฒิทั้งสามท่านที่ได้กรุณาทุ่มเทและเสียสละเวลาอันมีค่าของท่านในการอ่านผลงานต้นฉบับพร้อมทั้งให้ข้อเสนอแนะอันมีค่ายิ่ง ซึ่งคณะบรรณาธิการได้นำมาปรับปรุงคุณภาพเอกสารต้นฉบับจนนำมาสู่ตำราฉบับนี้ คณะบรรณาธิการรู้สึกซาบซึ้งและขอโอกาสนี้ขอบคุณทุก ๆ ท่านที่มีส่วนเกี่ยวข้องมา ณ ที่นี้ หากมีข้อบกพร่องประการใด คณะบรรณาธิการขอน้อมรับสิ่งเหล่านั้นไว้เอง

คณะบรรณาธิการ

กรกฎาคม 2561

สารบัญ

	หน้า
บทที่ 1 ลิมิตและความต่อเนื่อง	1
1.1 ลิมิตของฟังก์ชัน	2
1.2 บทนิยามของลิมิต	12
1.3 สมบัติและทฤษฎีบทของลิมิต	22
1.4 เทคนิคการคำนวณลิมิต	30
1.5 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน	44
บทที่ 2 อนุพันธ์	57
2.1 ปัญหาทางเรขาคณิต	57
2.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน	61
2.3 สมบัติของอนุพันธ์	73
2.4 อนุพันธ์ของฟังก์ชันผลประกอบ	82
2.5 อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย	86
2.6 อนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผัน	92
2.7 อนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม	95
2.8 อนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง	101
2.9 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	104
2.10 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน	108
2.11 ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก	116
2.12 อนุพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก	122
บทที่ 3 การประยุกต์ของอนุพันธ์	125
3.1 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน	125

3.2 ทฤษฎีบทของโรลล์และทฤษฎีบทค่ามัชฌิม 135

3.3 การเพิ่มขึ้นและการลดลงของฟังก์ชัน 142

3.4 ความเว้าของกราฟของฟังก์ชัน 155

3.5 การวาดกราฟ 168

3.6 การประยุกต์เรื่องค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด 178

3.7 ผลต่างอนุพันธ์ 186

3.8 อัตราสัมพัทธ์ 194

บทที่ 4 กฎของโลปิตาล 203

4.1 ฟังก์ชันที่มีรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\frac{0}{0}$ และ $\frac{\infty}{\infty}$ 204

4.2 ฟังก์ชันที่มีรูปแบบไม่กำหนดแบบอื่น ๆ 212

บทที่ 5 ลำดับ อนุกรม และอนุกรมกำลังของจำนวนจริง 219

5.1 ลำดับของจำนวนจริง 219

5.2 อนุกรมของจำนวนจริง 235

5.3 อนุกรมกำลังของจำนวนจริง 255

ภาคผนวก 1: ความรู้พื้นฐาน 267

ภาคผนวก 2: เฉลยแบบฝึกหัด 273

ดรรชนี 309

บรรณานุกรม 313

บทที่ 1

ลิมิตและความต่อเนื่อง

Limits and Continuity

ในทางวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ เรามักพบปัญหาที่ต้องคำนวณค่าด้วยการพิจารณาการเปลี่ยนแปลงค่าของปริมาณหนึ่งซึ่งขึ้นกับอีกปริมาณหนึ่ง ที่เปลี่ยนแปลงค่าเข้าใกล้ค่าคงตัวค่าหนึ่งอยู่เสมอ ตัวอย่างเช่นในการหาสูตรการคำนวณความยาวเส้นรอบวงของวงกลม เราเลือกที่จะคำนวณความยาวเส้นรอบรูปของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าแนบในวงกลมนั้นซึ่งจะมีค่าขึ้นกับความยาวด้านของรูปหลายเหลี่ยม แล้วพิจารณาว่าความยาวเส้นรอบรูปเปลี่ยนแปลงเข้าใกล้จำนวนจริงใด เมื่อรูปหลายเหลี่ยมเพิ่มจำนวนเหลี่ยมมากขึ้นหรือก็คือความยาวด้านของรูปหลายเหลี่ยมมีค่าน้อยลงเข้าใกล้ศูนย์ หรือปัญหาเกี่ยวกับอัตราเร็วของวัตถุซึ่งเคลื่อนที่ตามสมการ $S = S(t)$ ซึ่งขึ้นกับเวลา ถ้าเราต้องการทราบอัตราเร็วของวัตถุ ณ ชั่วขณะเวลา t_0 เราจะคำนวณอัตราเร็วเฉลี่ยของวัตถุในช่วงเวลา $[t_0, t_0 + h]$ เมื่อ $h > 0$ ซึ่งคือค่าของอัตราส่วน

$$\frac{S(t_0 + h) - S(t_0)}{h}$$

แล้วพิจารณาว่าอัตราส่วนนี้เปลี่ยนแปลงค่าเข้าใกล้จำนวนจริงใด เมื่อช่วงเวลา $[t_0, t_0 + h]$ มีขนาดเล็กลง ๆ หรือนั่นคือเมื่อ h เข้าใกล้ศูนย์เป็นต้น

ในบทนี้ เราจะศึกษาลักษณะการเปลี่ยนแปลงดังกล่าวข้างต้น กับฟังก์ชัน(ค่าจริง)ใด ๆ โดยแสดงการเขียนบทนิยามอย่างถูกต้องในเชิงคณิตศาสตร์ พร้อมทั้งพิสูจน์บางทฤษฎีบทเพื่อช่วยการคำนวณค่าเหล่านี้ได้ง่ายขึ้น

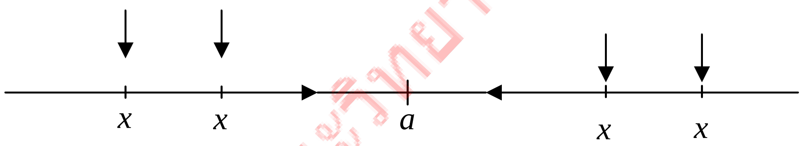
1.1 ลิมิตของฟังก์ชัน

ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งขึ้นกับตัวแปรอิสระ x ถ้า x เข้าใกล้ค่าคงตัว a แล้วค่า $f(x)$ เข้าใกล้ค่าคงตัว L เพียงตัวเดียว จะเรียก L ว่า **ลิมิตของ** $f(x)$ **เมื่อ** x **เข้าใกล้** a (limit of $f(x)$ as x approaches a) โดยจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x\to a} f(x)$ นั่นคือ

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

และกล่าวว่า**ลิมิตของ** $f(x)$ **เมื่อ** x **เข้าใกล้** a **หาได้** (limit of $f(x)$ as x approaches a exists) หรือ $\lim_{x\to a} f(x)$ **หาได้** นอกเหนือจากกรณีนี้ จะกล่าวว่า**ลิมิตของ** $f(x)$ **เมื่อ** x **เข้าใกล้** a **หาไม่ได้** (limit of $f(x)$ as x approaches a does not exist) หรือ $\lim_{x\to a} f(x)$ **หาไม่ได้**

โดยทั่วไปเมื่อกล่าวว่า "x เข้าใกล้ a" ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $x \to a$ เราหมายถึงการพิจารณา x ในบริเวณใกล้ ๆ รอบ ๆ a ซึ่ง $x \neq a$ โดยจะกล่าวว่า x **เข้าใกล้** a **จากทางซ้าย** ถ้า $x < a$ และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $x \to a^-$ และกล่าวว่า x **เข้าใกล้** a **จากทางขวา** ถ้า $x > a$ และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $x \to a^+$ ดังแสดงความหมายเหล่านี้ในรูป 1.1.1



รูป 1.1.1

ถ้าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ค่าคงตัว L_1 เมื่อ $x \to a^-$ เราจะเรียก L_1 ว่า **ลิมิตของ** $f(x)$ **เมื่อ** x **เข้าใกล้** a **จากทางซ้าย** (limit of $f(x)$ as x approaches a from the left) และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x\to a^-} f(x)$ นั่นคือ

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L_1$$

ในขณะที่จะเรียกค่าคงตัว L_2 ว่า **ลิมิตของ** $f(x)$ **เมื่อ** x **เข้าใกล้** a **จากทางขวา** (limit of $f(x)$ as x approaches a from the right) ถ้าค่า $f(x)$ เข้าใกล้ L_2 เมื่อ $x \to a^+$ และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x\to a^+} f(x)$ นั่นคือ

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L_2$$

เราเรียกสัญลักษณ์ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ หรือ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ ว่า**ลิมิตด้านเดียว** หรือ**ลิมิตทางเดียว** (one-sided limit) ของ $f(x)$ ที่ a และเรียกสัญลักษณ์ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ว่า**ลิมิตสองด้าน** (two-sided limit)

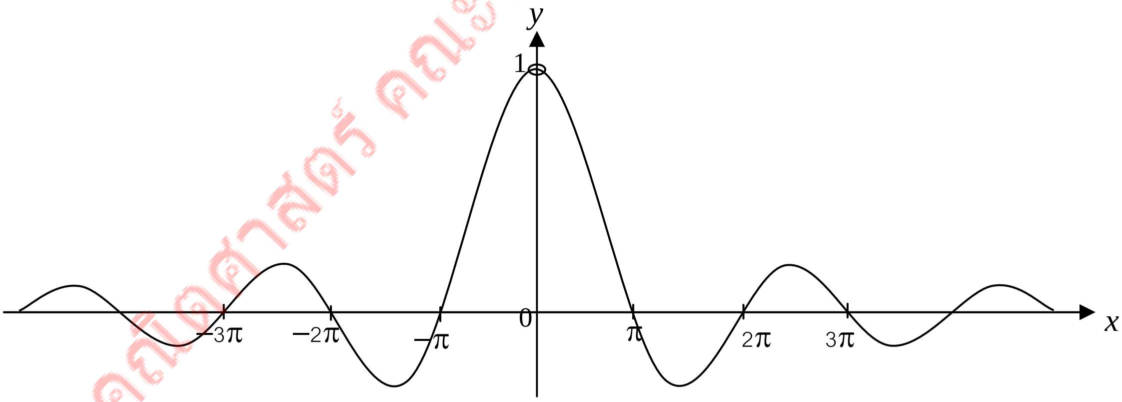
จากที่กล่าวมาข้างต้น จะเห็นว่าลิมิตของ f ที่ a หาได้ เมื่อลิมิตด้านเดียวที่ a ทั้งสองด้านหาได้และมีค่าเท่ากัน (โดยจะเห็นได้จากตัวอย่าง 1.1.1 และตัวอย่าง 1.1.2) ส่วนลิมิตของ f ที่ a หาไม่ได้ เมื่อลิมิตด้านเดียวของ f ที่ a หาได้ทั้งสองด้าน แต่ไม่เท่ากัน (ศึกษาจากตัวอย่าง 1.1.3 และตัวอย่าง 1.1.4) หรือลิมิตด้านใดด้านหนึ่งที่ a หาไม่ได้ (ศึกษาจากตัวอย่าง 1.1.5)

เพื่อให้เข้าใจความหมายของลิมิตได้ดียิ่งขึ้น ก่อนจะให้บทนิยามของลิมิต จะขอยกตัวอย่างการพิจารณาลิมิตของฟังก์ชันโดยกราฟ พอสังเขปดังนี้

ตัวอย่าง 1.1.1 พิจารณาฟังก์ชัน f ที่นิยามโดย $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ สำหรับทุก ๆ $x \neq 0$ ซึ่งกราฟของ f แสดงดังรูป 1.1.2 แม้ว่าฟังก์ชัน f จะไม่นิยามที่ $x=0$ แต่ก็อาจพิจารณาค่า $f(x)$ เมื่อ x เข้า 0 ซึ่งจากรูปจะเห็นว่าค่า $\dfrac{\sin x}{x}$ เข้าใกล้ 1 ทั้งเมื่อ $x \to 0^-$ และเมื่อ $x \to 0^+$ ดังนั้น

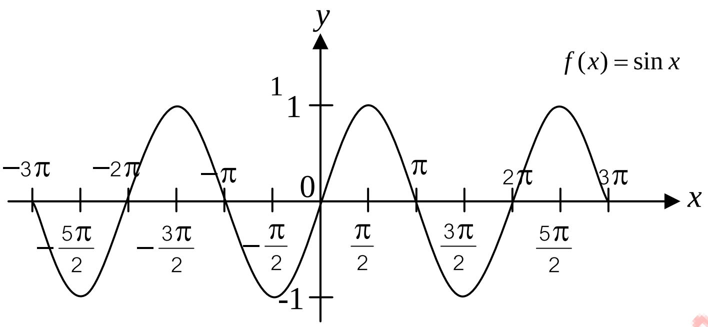
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x} = 1 = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}$$

เราจึงสรุปได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$



รูป 1.1.2

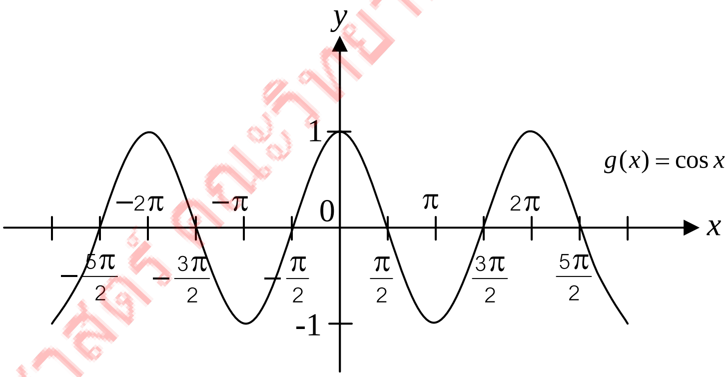
ตัวอย่าง 1.1.2 พิจารณาฟังก์ชัน f และ g ที่นิยามโดย $f(x)=\sin x$ และ $g(x)=\cos x$ สำหรับทุกจำนวนจริง x ซึ่งกราฟของ f และ g แสดงดังรูป 1.1.3 และ รูป 1.1.4 ตามลำดับ



รูป 1.1.3

จากกราฟจะเห็นได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0^-}\sin x = 0 = \lim\limits_{x\to 0^+}\sin x$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$

และ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\sin x = 1 = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\sin x$ ซึ่งทำให้ได้ว่า $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\sin x = 1$

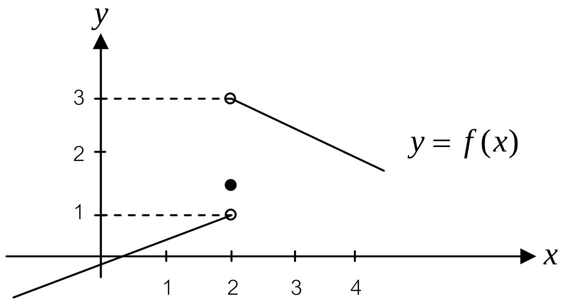


รูป 1.1.4

จากกราฟจะเห็นได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0^-}\cos x = 1 = \lim\limits_{x\to 0^+}\cos x$ เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$

และ $\lim\limits_{x\to \pi^-}\cos x = -1 = \lim\limits_{x\to \pi^+}\cos x$ ซึ่งจะได้ว่า $\lim\limits_{x\to \pi}\cos x = -1$ ❍

ตัวอย่าง 1.1.3 ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งกราฟของ f แสดงดังรูป 1.1.5

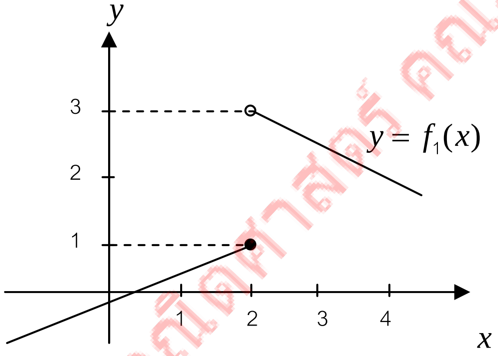


รูป 1.1.5

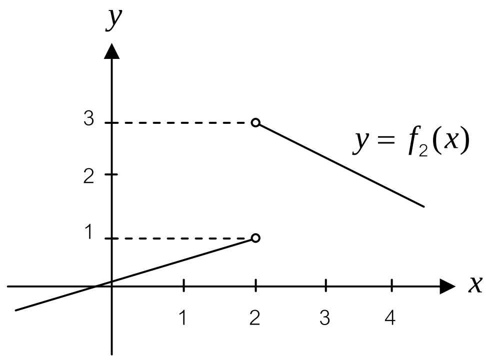
จะเห็นว่าขณะที่ x เข้าใกล้ 2 จากทางซ้ายค่า $f(x)$ เข้าใกล้ 1 นั่นคือ $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$ และขณะที่ x เข้าใกล้ 2 จากทางขวาค่า $f(x)$ เข้าใกล้ 3 นั่นคือ $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3$ ดังนั้น $\lim_{x\to 2} f(x)$ หาไม่ได้ จากรูป 1.1.5 เช่นกัน จะเห็นว่า $f(2) = 1.5$ ❍

ข้อสังเกต ตัวอย่าง 1.1.3 แสดงให้เห็นว่าลิมิตซ้าย ลิมิตขวาและค่าของฟังก์ชันที่จุดนั้นอาจต่างกันได้ทั้งหมด

ตัวอย่าง 1.1.4 ให้ f_1 และ f_2 เป็นฟังก์ชันซึ่งกราฟของฟังก์ชันทั้งสองแสดงดังรูป 1.1.6 และรูป 1.1.7 ตามลำดับ



รูป 1.1.6



รูป 1.1.7

จากรูป 1.1.6 และรูป 1.1.7 จะเห็นว่ากราฟของ f_1 และ f_2 เป็นกราฟรูปเดียวกันกับกราฟของ f ในตัวอย่าง 1.1.3 ต่างกันที่ $f(2) = 1.5$ ซึ่งไม่เท่ากับ $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ และ $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ ในขณะที่ $f_1(2) = 1 = \lim_{x\to 2^-} f_1(x)$ และ $f_2(2)$ ไม่นิยาม อย่างไรก็ตามลิมิตของฟังก์ชัน f_1 และ f_2 ที่ 2 หาไม่ได้เช่นเดียวกัน ทั้งนี้เพราะว่า

$$\lim_{x\to 2^-} f_1(x) = \lim_{x\to 2^-} f_2(x) = 1$$

และ

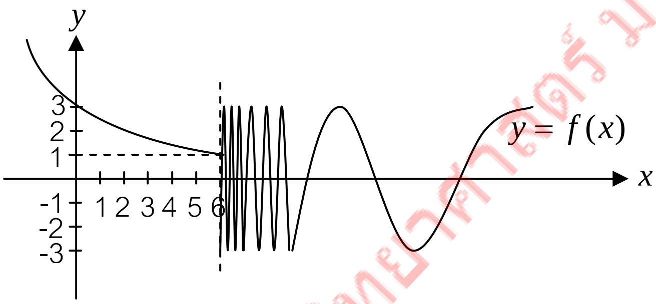
$$\lim_{x\to 2^+} f_1(x) = \lim_{x\to 2^+} f_2(x) = 3$$

❍

ข้อสังเกต 1. จากตัวอย่าง 1.1.3 และตัวอย่าง 1.1.4 อาจกล่าวได้ว่าลิมิตซ้ายและลิมิตขวาของฟังก์ชันไม่ขึ้นต่อกันและไม่ขึ้นกับค่าของฟังก์ชันที่จุดนั้น

2. ฟังก์ชัน f_2 ในตัวอย่าง 1.1.4 แสดงให้เห็นว่าลิมิตซ้ายและลิมิตขวาของฟังก์ชันสามารถหาได้ แม้ว่าค่าของฟังก์ชันที่จุดนั้นจะไม่นิยามก็ตาม

ตัวอย่าง 1.1.5 ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งกราฟของฟังก์ชันแสดงดังรูป 1.1.8

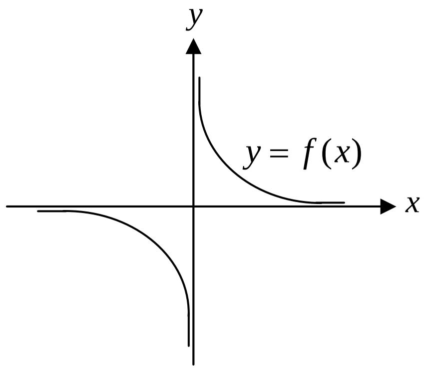


รูป 1.1.8

จากรูป 1.1.8 เมื่อ x เข้าใกล้ 6 จากทางซ้าย $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 1 ดังนั้น $\lim_{x\to 6^-} f(x) = 1$ แต่เมื่อ x เข้าใกล้ 6 ทางด้านขวา ค่าของฟังก์ชัน f แปรเปลี่ยนมากมายในช่วง -3 ถึง 3 โดยจะเห็นว่าเมื่อ x เข้าใกล้ 6 จากทางขวามากยิ่งขึ้นเท่าใดก็ตาม ค่า $f(x)$ ก็แปรเปลี่ยนมากยิ่งขึ้นเช่นกัน ซึ่งกล่าวได้ว่าไม่มีค่าคงตัวค่าใดเลยในช่วง $[-3,3]$ นี้ที่ค่า $f(x)$ เข้าใกล้ค่านั้น เพราะฉะนั้น $\lim_{x\to 6^+} f(x)$ หาไม่ได้ ❍

ข้อสังเกต จากตัวอย่าง 1.1.5 แสดงให้เห็นว่ามีบางฟังก์ชันที่หาลิมิตซ้ายหรือลิมิตขวาได้เพียงอย่างเดียว

ตัวอย่าง 1.1.6 ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งกราฟของฟังก์ชันแสดงดังรูป 1.1.9



รูป 1.1.9

จากรูป 1.1.9 จะเห็นว่าขณะที่ x เข้าใกล้ 0 จากทางขวา $f(x)$ มีค่ามากขึ้นเรื่อย ๆ โดยไม่มีที่สิ้นสุด ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ หาไม่ได้ ซึ่งการหาลิมิตไม่ได้ในกรณีนี้ เราจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

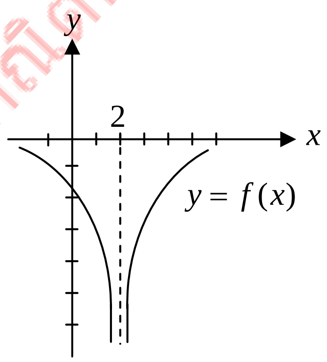
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

แต่ขณะที่ x เข้าใกล้ 0 จากทางซ้าย $f(x)$ มีค่าน้อยลงเรื่อย ๆ โดยไม่มีที่สิ้นสุด ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ หาไม่ได้ ซึ่งการหาลิมิตไม่ได้ในกรณีนี้ เราจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

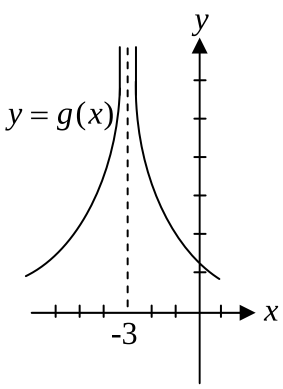
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$$

❍

ตัวอย่าง 1.1.7 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่งกราฟของฟังก์ชันแสดงดังรูป 1.1.10 และรูป 1.1.11 ตามลำดับ



รูป 1.1.10



รูป 1.1.11

จากรูป 1.1.10 จะเห็นว่าขณะที่ x เข้าใกล้ 2 จากทางซ้ายและจากทางขวา $f(x)$ มีค่าลดลงเรื่อย ๆ โดยไม่มีที่สิ้นสุด ซึ่งการหาลิมิตไม่ได้ในกรณีนี้ เราจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$$

จากรูป 1.1.11 จะเห็นในทำนองเดียวกันว่าขณะที่ x เข้าใกล้ -3 ทั้งจากทางซ้ายและจากทางขวา $f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ โดยไม่มีที่สิ้นสุด ซึ่งการหาลิมิตไม่ได้ในกรณีนี้ เราจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x\to -3} g(x) = +\infty$$

❍

ในกรณีทั่วไป การพิจารณาลิมิตของฟังก์ชัน f ที่ค่าคงตัว a ถ้า $f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ โดยไม่มีที่สิ้นสุด ขณะที่ x เข้าใกล้ a จากทางซ้าย หรือจากทางขวา หรือจากทั้งสองทาง เราจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty \quad \text{หรือ} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \quad \text{หรือ} \quad \lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

ตามลำดับ และอ่านว่า “ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a จากทางซ้าย (หรือ x เข้าใกล้ a จากทางขวา หรือ x เข้าใกล้ a ตามลำดับ) เท่ากับบวกอนันต์”

แต่ถ้า $f(x)$ มีค่าลดลงเรื่อย ๆ โดยไม่มีที่สิ้นสุด ขณะที่ x เข้าใกล้ a จากทางซ้าย หรือจากทางขวา หรือจากทั้งสองทาง เราจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \quad \text{หรือ} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \quad \text{หรือ} \quad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

ตามลำดับ และอ่านว่า “ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a จากทางซ้าย (หรือ x เข้าใกล้ a จากทางขวา หรือ x เข้าใกล้ a ตามลำดับ) เท่ากับลบอนันต์”

จากตัวอย่างที่กล่าวมา จะเห็นว่าการหาลิมิตของฟังก์ชันเป็นการพิจารณาลักษณะการเปลี่ยนแปลงค่าของฟังก์ชันเมื่อตัวแปรอิสระเข้าใกล้ค่าคงตัวตัวหนึ่ง แต่อย่างไรก็ตามในเรื่องของลิมิตนี้เรายังอาจพิจารณาลักษณะการเปลี่ยนแปลงค่าของฟังก์ชันเมื่อตัวแปรอิสระของฟังก์ชันเพิ่มขึ้นหรือลดลงเรื่อยๆ โดยไม่มีที่สิ้นสุด

ถ้าตัวแปรอิสระ x มีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ โดยไม่มีที่สิ้นสุด จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $x \to +\infty$ และอ่านว่า “x เข้าใกล้บวกอนันต์” ในทำนองเดียวกันถ้า x มีค่าลดลงเรื่อย ๆ โดยไม่มีที่สิ้นสุด เราจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $x \to -\infty$ และอ่านว่า “x เข้าใกล้ลบอนันต์”

ถ้า $x \to +\infty$ หรือ $x \to -\infty$ แล้วค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ค่าคงตัว L เพียงจำนวนเดียว จะเขียนแทน L ด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ หรือ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ นั่นคือ จะเขียน

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \quad \text{หรือ} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

ตามลำดับ เราเรียก $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ว่า **ลิมิตของ** $f(x)$ **เมื่อ** x **เข้าใกล้บวกอนันต์** และเรียก $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ว่า **ลิมิตของ** $f(x)$ **เมื่อ** x **เข้าใกล้ลบอนันต์**

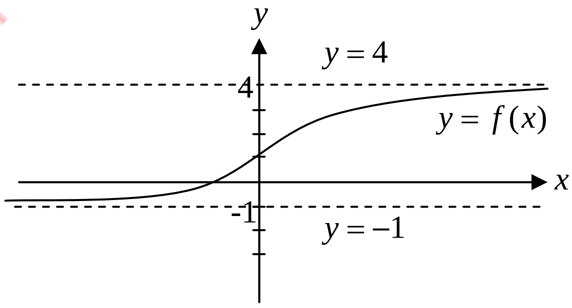
ถ้า $x \to +\infty$ แล้ว $f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ โดยไม่มีที่สิ้นสุด หรือลดลงเรื่อย ๆ โดยไม่มีที่สิ้นสุด จะเขียนแทน ด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{หรือ} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

และอ่านว่า “ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้บวกอนันต์เท่ากับบวกอนันต์” และ “ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้บวกอนันต์เท่ากับลบอนันต์” ตามลำดับ ข้อตกลงทางสัญลักษณ์สำหรับกรณีที่ $x \to -\infty$ แล้ว $f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ โดยไม่มีที่สิ้นสุด หรือลดลงเรื่อย ๆ โดยไม่มีที่สิ้นสุด จะเป็นไปในทำนองเดียวกัน

ตัวอย่างต่อไปนี้แสดงการพิจารณาลิมิตของฟังก์ชันเมื่อตัวแปรอิสระ x เพิ่มขึ้นหรือลดลงเรื่อย ๆ โดยไม่มีที่สิ้นสุด

ตัวอย่าง 1.1.8 ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งกราฟของฟังก์ชันแสดงดังรูป 1.1.12

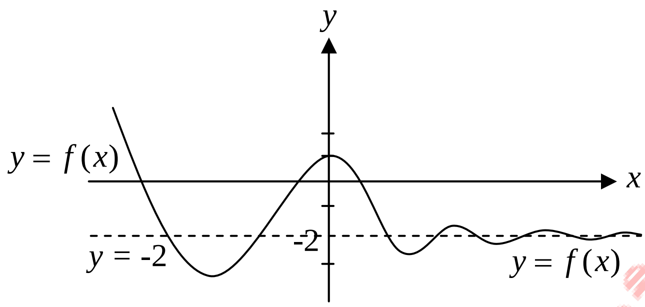


รูป 1.1.12

ขณะที่ $x \to +\infty$ จะเห็นว่ากราฟของ f เข้าใกล้เส้นตรง $y = 4$ ดังนั้นค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ 4 นั่นคือ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 4$

ขณะที่ $x \to -\infty$ จะเห็นว่ากราฟของ f เข้าใกล้เส้นตรง $y = -1$ ดังนั้นค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ -1 นั่นคือ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$ ❍

ตัวอย่าง 1.1.9 ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งกราฟของฟังก์ชันแสดงดังรูป 1.1.13

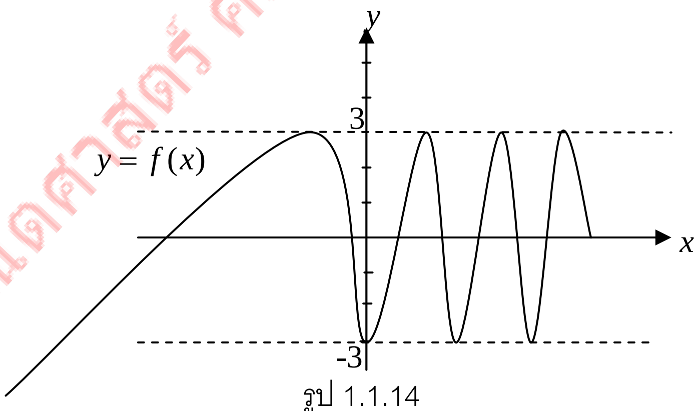


รูป 1.1.13

ขณะที่ $x \to -\infty$ จะเห็นว่า $f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ โดยไม่มีที่สิ้นสุด เพราะฉะนั้น $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

และขณะที่ $x \to +\infty$ ค่าของ $f(x)$ กวัดแกว่งขึ้นลงตามแนวเส้นตรง $y = -2$ และเมื่อ x ยิ่งมากขึ้นการกวัดแกว่งของ $f(x)$ โดยมีเส้นตรง $y = -2$ เป็นแกนจะยิ่งแคบลงดังรูป ทำให้เห็นได้ชัดว่าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ -2 นั่นคือ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -2$ ❍

ตัวอย่าง 1.1.10 ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งกราฟของฟังก์ชันแสดงดังรูป 1.1.14



รูป 1.1.14

ขณะที่ $x \to -\infty$ จะเห็นว่า $f(x)$ มีค่าลดลงเรื่อย ๆ โดยไม่มีที่สิ้นสุด ดังนั้น $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

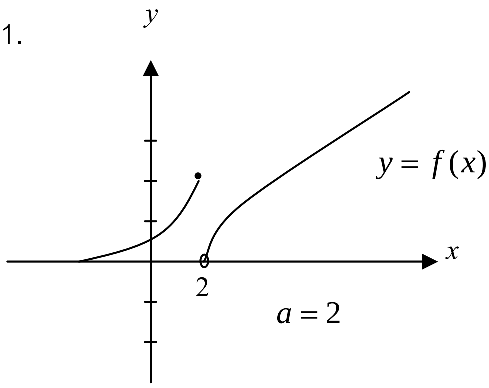
แต่ในขณะที่ $x \to +\infty$ ค่าของ $f(x)$ กวัดแกว่งขึ้นลงอย่างสม่ำเสมอในช่วง $[-3, 3]$ นั่นคือหาค่าคงตัวค่าหนึ่งค่าใดไม่ได้ที่ $f(x)$ จะเข้าใกล้ค่านั้น ดังนั้น $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ จึงหาไม่ได้ ❍

แบบฝึกหัด 1.1

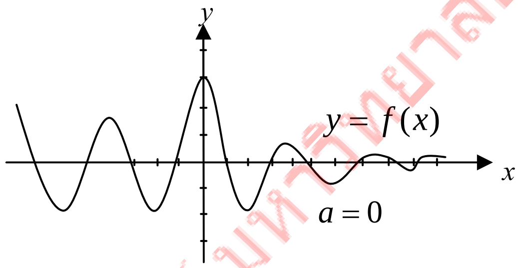
ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งกราฟของฟังก์ชันแสดงดังรูป สำหรับกราฟในข้อ 1-6 จงหา

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $f(a)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

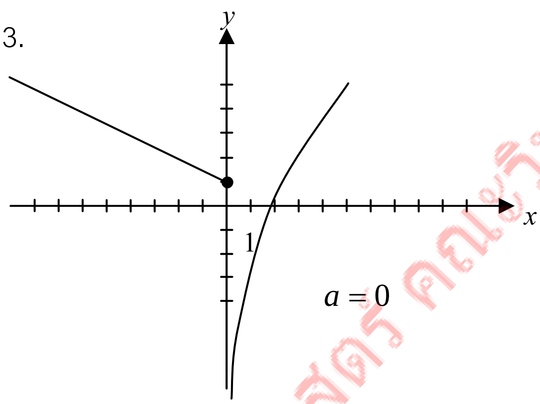
1.



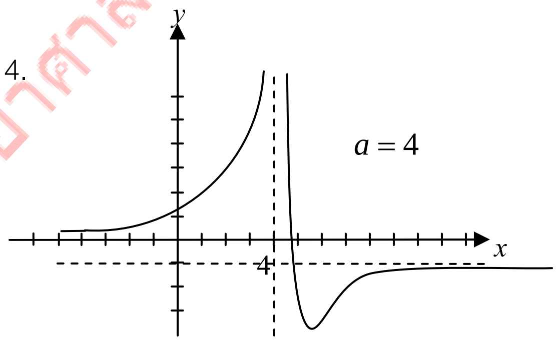
2.



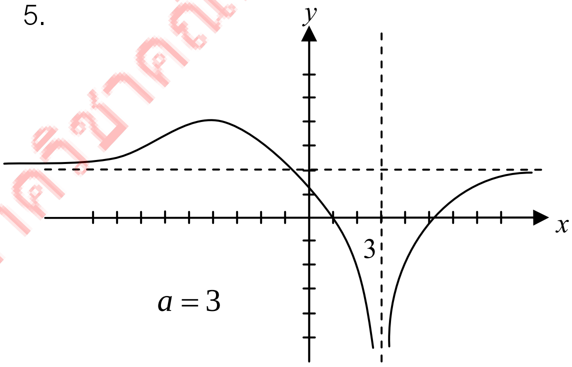
3.



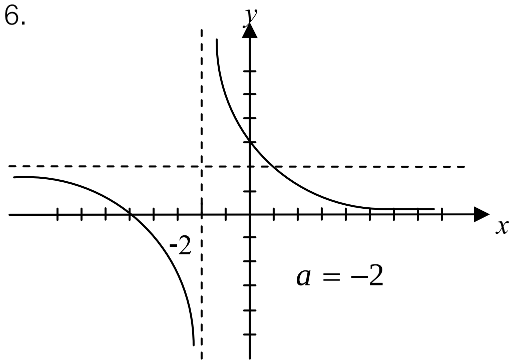
4.



5.



6.



1.2 บทนิยามของลิมิต

ให้ a เป็นค่าคงตัว และ I เป็นช่วงเปิด เราเรียก I ว่า**ช่วงเปิดรอบ** a ถ้า $a \in I$ ตัวอย่างเช่น $(0,4)$ เป็นช่วงเปิดรอบ 1 และยังมีช่วงเปิดรอบ 1 อีกมากมายนับไม่ถ้วนเช่น $(-3,2)$, $(-\infty,2)$ และ $(-5,+\infty)$ เป็นต้น

กำหนดให้ a และ L เป็นค่าคงตัว และ I เป็นช่วงเปิดรอบ a และให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบน I อาจจะยกเว้นได้ที่ a จากหัวข้อ 1.1 เราได้ให้ความหมายสัญลักษณ์

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad (1.2.1)$$

ซึ่งหมายถึง $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ L เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a ดังนั้นการเขียนบทนิยามทางคณิตศาสตร์ให้กับสัญลักษณ์ใน (1.2.1) เราต้องแปลความหมายคำว่า “เข้าใกล้” ให้เป็นความหมายทางคณิตศาสตร์เสียก่อน

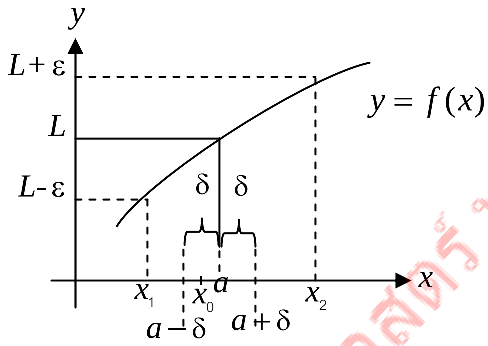
ในหัวข้อ 1.1 เราได้ให้ความหมายของข้อความ “ (ตัวแปรอิสระ) x เข้าใกล้ a” โดยหมายความว่า x ถูกกำหนดให้มีค่าที่ใกล้เคียง a เท่าใดก็ได้ ไม่ว่า x จะน้อยกว่า a หรือมากกว่า a แต่ไม่เท่ากับ a ซึ่งความหมายดังกล่าวสามารถเขียนเชิงคณิตศาสตร์ได้โดย กำหนดช่วงเปิด $(a-\delta, a+\delta)$ ใด ๆ โดยที่ $\delta > 0$ ซึ่งเป็นช่วงเปิดรอบ a แทนข้อความ “ใกล้เคียง a เท่าใดก็ได้“ จากการกำหนดดังกล่าว ทำให้เราให้ความหมายของข้อความ “x เข้าใกล้ a” เชิงคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

“ (ตัวแปรอิสระ) x เข้าใกล้ a” หมายถึง ทุก ๆ $\delta > 0$ จะมี x_0 ใน $(a-\delta, a+\delta)$ โดยที่ $x_0 \neq a$ และ x มีค่าเท่ากับ x_0

สำหรับข้อความ “ (ตัวแปรตาม) $f(x)$ เข้าใกล้ L” เราจะหมายความในทำนองเดียวกัน เพียงแต่กรณีหลังนี้ $f(x)$ อาจเท่ากับ L ได้สำหรับบางค่า x

จากการให้ความหมายเชิงคณิตศาสตร์ของการเข้าใกล้ค่าคงตัวของทั้งตัวแปรอิสระและตัวแปรตามที่กล่าวมาข้างต้น เราสามารถให้ความหมายเชิงคณิตศาสตร์ของสัญลักษณ์ใน (1.2.1) โดยจะอธิบายให้เห็นดังนี้

โดยการให้ความหมายของข้อความ “ $f(x)$ เข้าใกล้ L” เราควรจะกำหนดจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ ใด ๆ เสียก่อน ต่อไป เพื่อจะให้ได้ข้อความ “ $f(x)$ เข้าใกล้ L” เราต้องการทราบค่าของตัวแปรอิสระ x ที่ทำให้ $f(x)$ มีค่าในช่วงเปิด $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ ซึ่งควรจะพิจารณาจากการที่ตัวแปรอิสระ x เข้าใกล้ a ดังนั้น การมีของค่าของตัวแประอิสระ x ดังกล่าว จึงมีความหมายเดียวกันกับการมีของช่วงเปิด $(a-\delta, a+\delta)$ โดยที่ $\delta > 0$ ซึ่งมีสมบัติว่า ถ้า $x = x_0$ สำหรับบาง $x_0 \in (a-\delta, a+\delta)$ โดยที่ $x_0 \neq a$ แล้ว $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ (ดูรูป 1.2.1)



รูป 1.2.1

การอธิบายข้างต้นนำไปสู่การเขียนบทนิยามของลิมิตดังนี้

บทนิยาม 1.2.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันและมีบางช่วงเปิดรอบค่าคงตัว a ที่ f ได้นิยามไว้ทุกจุดในช่วงนี้ซึ่งอาจยกเว้นได้ที่ a และ L เป็นค่าคงตัว เราเรียก L ว่า **ลิมิตของ** $f(x)$ **เมื่อ** x **เข้าใกล้** a และเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ ถ้าสำหรับแต่ละจำนวนจริงบวก ε จะมีจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้

$$| f(x) - L | < \varepsilon$$

สำหรับทุก ๆ x ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta$

ตัวอย่าง 1.2.2 จงแสดงว่า $\lim\limits_{x \to 2} (3x-5) = 1$ โดยใช้บทนิยาม 1.2.1

วิธีคิด ก่อนที่จะพิสูจน์ เราลองมาพิจารณาว่าถ้ากำหนด $\varepsilon > 0$ มาให้ แล้วเราควรจะหา $\delta > 0$ เป็นเท่าใดที่จะทำให้

$$|(3x-5)-1| \; < \; \varepsilon \qquad (1.2.2)$$

เมื่อ x สอดคล้องกับอสมการ $0 < |x-2| < \delta$ และเพื่อจะหา δ เราจะเขียน (1.2.2) ใหม่ดังนี้

$$|3x-6| < \varepsilon \qquad \text{หรือก็คือ} \qquad 3|x-2| < \varepsilon$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$|x-2| < \tfrac{\varepsilon}{3}$$

เราจึงทราบว่าจะต้องเลือก $\delta \le \frac{\varepsilon}{3}$ ในการพิสูจน์

วิธีทำ กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก เลือก $\delta \le \frac{\varepsilon}{3}$ ดังนั้นเมื่อ x สอดคล้องกับอสมการ $0 < |x-2| < \frac{\varepsilon}{3}$ แล้วจะได้

$$|f(x)-L| = |(3x-5)-1| = |3x-6| = 3|x-2| < 3\tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$ ❍

ข้อสังเกต

1. ในการแสดงว่า $\lim_{x\to a} f(x) = L$ เราต้องหา $\delta > 0$ เพื่อให้เงื่อนไขของบทนิยาม 1.2.1 เป็นจริง ดังนั้น δ ที่หาได้จึงขึ้นกับค่า ε ที่กำหนดมาดังตัวอย่าง 1.2.2

2. จำนวนจริงบวก δ ในบทนิยาม 1.2.1 มีได้หลายค่า เช่นถ้าทราบว่า δ_1 เป็นจำนวนจริงบวกที่ทำให้เงื่อนไขของบทนิยาม 1.2.1 เป็นจริง แล้วจำนวนจริงบวก δ_2 ใด ๆ ที่น้อยกว่า δ_1 ก็จะทำให้เงื่อนไขของบทนิยาม 1.2.1 เป็นจริงด้วย เพราะว่า ถ้า $0 < |x-a| < \delta_2$ แล้ว $0 < |x-a| < \delta_2 < \delta_1$ ดังนั้น ในตัวอย่าง 1.2.2 เราอาจเลือก δ เป็น $\frac{\varepsilon}{4}$ หรือ $\frac{\varepsilon}{5}$ หรือ $\frac{\varepsilon}{6}$

ต่อไปจะเป็นการให้บทนิยามของลิมิตทางเดียว ซึ่งการให้บทนิยามหรือความหมายของสัญลักษณ์ $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ และ $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ นั้นสามารถอธิบายได้เช่นเดียวกับลิมิตสองทางที่ได้กล่าวมาแล้วก่อนหน้านี้ ต่างกันเพียงแต่ลิมิตทางเดียวนั้น ค่าของตัวแปรอิสระ x จะน้อยกว่าหรือมากกว่า a เพียงอย่างใดอย่างหนึ่ง

บทนิยาม 1.2.3 ให้ f เป็นฟังก์ชันและมีบางช่วงเปิดรอบ a ที่ f ได้นิยามไว้ทุกจุดในช่วงนี้ซึ่งอาจยกเว้นได้ที่ a และ L เป็นค่าคงตัว

1. เราเรียก L ว่า **ลิมิตของ** $f(x)$ **เมื่อ** x **เข้าใกล้** a **ทางซ้าย** และเขียนแทนด้วย $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ ถ้าสำหรับจำนวนจริงบวก ε มีจำนวนจริงบวก δ โดยที่

$$|f(x)-L| < \varepsilon$$

สำหรับทุก ๆ x ซึ่ง $a-\delta<x<a$

2. เราเรียก L ว่า **ลิมิตของ** $f(x)$ **เมื่อ** x **เข้าใกล้** a **ทางขวา** และเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$ ถ้าสำหรับจำนวนจริงบวก ε มีจำนวนจริงบวก δ โดยที่

$$|f(x)-L|<\varepsilon$$

สำหรับทุก ๆ x ซึ่ง $a<x<a+\delta$

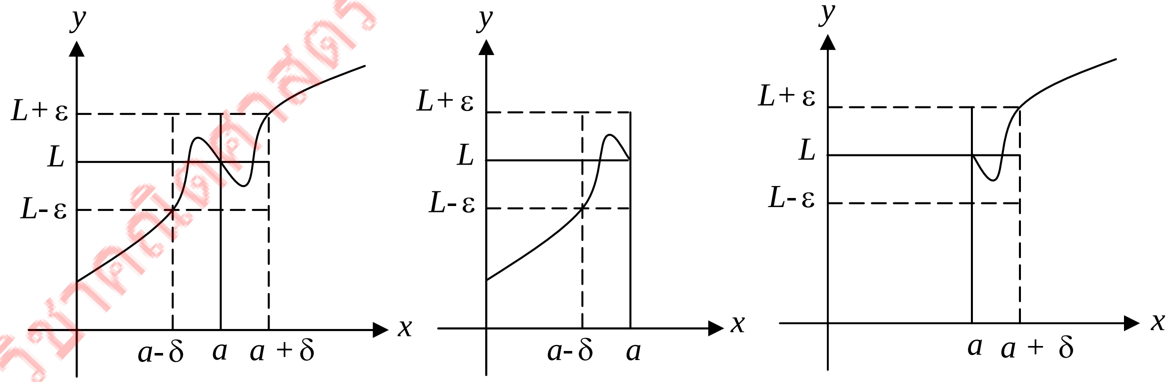
ก่อนการให้ตัวอย่างการแสดงลิมิตด้านเดียวเป็นจริง จะขอเปรียบเทียบความหมายของบทนิยาม 1.2.1 กับบทนิยาม 1.2.3 ดังนี้

ในบทนิยาม 1.2.1 กล่าวว่าเมื่อกำหนด $\varepsilon>0$ มาให้ เราต้องหา $\delta>0$ ที่ทำให้ $f(x)$ สอดคล้องกับอสมการ

$$|f(x)-L|<\varepsilon \qquad (1.2.3)$$

ถ้า x สอดคล้องกับอสมการ $0<|x-a|<\delta$ หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งก็คือ x เป็นสมาชิกของเซต $(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$ ดังรูป 1.2.2 (ก)

สำหรับบทนิยาม 1.2.3 (1) ต้องการให้ (1.2.3) เป็นจริงเฉพาะเมื่อ x เป็นสมาชิกของเซต $(a-\delta,a)$ ดังรูป 1.2.2 (ข) เท่านั้น ในขณะที่บทนิยาม 1.2.3 (2) ต้องการให้ (1.2.3) เป็นจริงเฉพาะเมื่อ x เป็นสมาชิกของเซต $(a,a+\delta)$ ดังรูป 1.2.2 (ค) เท่านั้น



(ก) (ข) (ค)

รูป 1.2.2

ตัวอย่าง 1.2.4 จงแสดงว่า $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$

วิธีทำ กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก เลือก $0 < \delta \le \varepsilon^2$ ดังนั้นเมื่อใดที่ x สอดคล้องกับอสมการ $0 < x < 0 + \delta$ หรือ $0 < x < \delta \le \varepsilon^2$ จะได้ $\sqrt{x} < \varepsilon$ และเนื่องจาก $\sqrt{x} = \left|\sqrt{x}\right|$ จึงได้

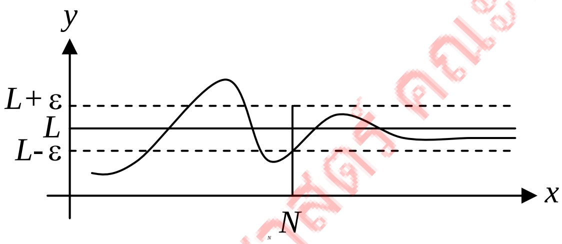
$$\left| f(x) - L \right| = \sqrt{x} < \varepsilon$$

ข้อสังเกต เนื่องจากฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย $f(x) = \sqrt{x}$ มีโดเมนคือเซตของจำนวนจริงไม่เป็นลบ ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$ เท่านั้นที่เป็นจริง ส่วนการเขียน $\lim\limits_{x \to 0^-} \sqrt{x} = 0$ หรือ $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$ จึงเป็นการเขียนประโยคที่ไม่มีความหมาย

ในหัวข้อ 1.1 ได้กล่าวถึงลิมิตต่อไปนี้เมื่อ L เป็นค่าคงตัวด้วยเช่นกันคือ

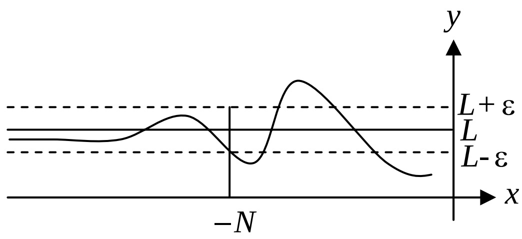
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \quad \text{และ} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

เราจึงต้องพิจารณาการให้ความหมายทางคณิตศาสตร์ของ “$x \to +\infty$” และ “$x \to -\infty$” ซึ่งโดยการสังเกตจากรูป 1.2.3 และรูป 1.2.4



$f(x)$ สอดคล้อง $\left| f(x) - L \right| < \varepsilon$ เมื่อ $x > N$

รูป 1.2.3



$f(x)$ สอดคล้อง $\left| f(x) - L \right| < \varepsilon$ เมื่อ $x < -N$

รูป 1.2.4

เราสามารถแปลความหมายได้ตามลำดับดังนี้

1. $x \to +\infty$ หมายความว่าเมื่อกำหนดจำนวนบวก N ไม่ว่า N จะมีค่ามากเท่าใดก็ตามจะยังคงมี x ซึ่ง $x > N$

2. $x \to -\infty$ หมายความว่าเมื่อกำหนดจำนวนบวก N ไม่ว่า N จะมีค่ามากเท่าใดก็ตามจะยังคงมี x ซึ่ง $x < -N$

เมื่อนำความหมายเหล่านี้รวมกับความหมายของ “ $f(x)$ เข้าใกล้ L ” ดังที่เคยกล่าวมา แล้วจะได้บทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1.2.5 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่ได้นิยามไว้บนช่วงอนันต์ $(a,+\infty)$ และ L เป็นค่าคงตัว เราเรียก L ว่า **ลิมิตของ** $f(x)$ **เมื่อ** $x\to+\infty$ และเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon>0$ จะต้องมีจำนวนจริงบวก N ที่ทำให้

$$|f(x)-L|<\varepsilon$$

สำหรับทุก ๆ x ซึ่ง $x>N$ (ดังรูป 1.2.3)

บทนิยาม 1.2.6 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่ได้นิยามไว้บนช่วงอนันต์ $(-\infty,\ a)$ และ L เป็นค่าคงตัว เราเรียก L ว่า **ลิมิตของ** $f(x)$ **เมื่อ** $x\to-\infty$ และเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon>0$ จะต้องมีจำนวนจริงบวก N ที่ทำให้

$$|f(x)-L|<\varepsilon$$

สำหรับทุก ๆ x ซึ่ง $x<-N$ (ดังรูป 1.2.4)

ตัวอย่าง 1.2.7 จงแสดงว่า $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

วิธีทำ กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก เราเลือก $N\ge\frac{1}{\varepsilon}$ แล้วได้ว่าเมื่อ x สอดคล้องกับอสมการ $x<-N$ จะทำให้ $x<-\frac{1}{\varepsilon}$ ซึ่งสมมูลกับ $-x>\frac{1}{\varepsilon}$

เนื่องจาก $\frac{1}{\varepsilon}$ เป็นจำนวนบวก จึงได้ x เป็นจำนวนลบ ดังนั้น

$$|x|=-x>\frac{1}{\varepsilon} \quad \text{ซึ่งสมมูลกับ} \quad \left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$$

ทำให้ได้ว่า

$$|f(x)-L|=\left|\frac{1}{x}-0\right|=\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$$ ❍

ในหัวข้อ 1.1 ได้พิจารณาลิมิตของฟังก์ชันด้วยรูป ในลักษณะต่าง ๆ ต่อไปนี้คือ

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty \qquad (1.2.4)$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty \qquad (1.2.5)$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty \qquad (1.2.6)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad (1.2.7)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \qquad (1.2.8)$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \qquad (1.2.9)$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \qquad (1.2.10)$$

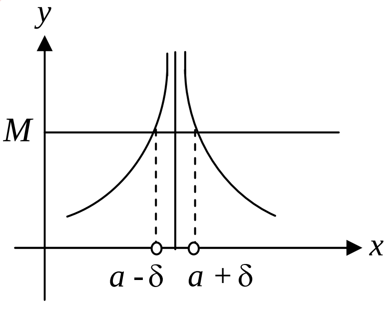
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \qquad (1.2.11)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \qquad (1.2.12)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad (1.2.13)$$

เรากล่าวว่าลิมิตใน (1.2.4) - (1.2.13) หาไม่ได้ เพราะว่าค่า $f(x)$ ใน (1.2.4) - (1.2.8) มีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ โดยไม่มีที่สิ้นสุด ในขณะที่ค่า $f(x)$ ใน (1.2.9) - (1.2.13) มีค่าลดลงเรื่อย ๆ โดยไม่มีที่สิ้นสุด และเพื่อจะให้บทนิยามของลิมิตเหล่านี้ เราต้องพิจารณาความหมายของข้อความ " $f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ โดยไม่มีที่สิ้นสุด" และในที่นี้จะพิจารณาเพื่อให้บทนิยามของ (1.2.4) และ (1.2.8) เท่านั้น สำหรับบทนิยามลิมิตที่เหลือสามารถนิยามได้ในทำนองเดียวกัน

เมื่อกล่าวว่า $f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ โดยไม่มีที่สิ้นสุดในขณะที่ x เข้าใกล้ a ทั้งจากทางซ้ายและจากทางขวาของ a เราหมายความว่าเมื่อกำหนดจำนวนจริงบวก M มาให้ไม่ว่า M จะมีค่ามากเท่าใดก็ตาม เรายังคงหา x ที่อยู่ใกล้ ๆ a ได้ทั้งที่มากกว่า a และน้อยกว่า a และทำให้ $f(x)$ มีค่ามากกว่า M ดังรูป 1.2.5



รูป 1.2.5

จะเห็นว่าเมื่อกำหนดจำนวนจริงบวก M ลงบนแกน y จะมี x ที่อยู่ระหว่างจุด $a-\delta$ และ $a+\delta$ ที่ทำให้

$$f(x) > M \qquad (1.2.14)$$

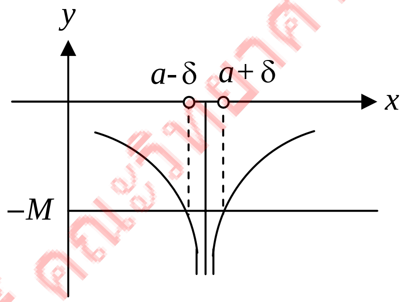
และจากรูป 1.2.5 จะเห็นว่าไม่ว่า M จะมีค่ามากเท่าใด ก็จะสามารถหา δ ที่เล็กพอที่ทำให้ (1.2.14) เป็นจริง เมื่อ $a-\delta < x < a+\delta$ จึงสรุปเป็นบทนิยามได้ดังนี้

บทนิยาม 1.2.8 ให้ f เป็นฟังก์ชันและมีบางช่วงเปิดรอบค่าคงตัว a ที่ f ได้นิยามไว้ทุกจุดใน ช่วงนี้ซึ่งอาจยกเว้นได้ที่ a เรากล่าวว่า **ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a มีค่าเท่ากับ** $+\infty$ และเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ถ้าสำหรับแต่ละจำนวนจริงบวก M มีจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้

$$f(x) > M$$

สำหรับทุก ๆ x ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta$

ในทำนองเดียวกันเมื่อกล่าวว่า $f(x)$ มีค่าลดลงเรื่อย ๆ โดยไม่มีที่สิ้นสุด ในขณะที่ x เข้าใกล้ a ทั้งจากทางซ้ายและจากทางขวาของ a เราหมายความว่าเมื่อกำหนดจำนวนจริงบวก M มาให้ไม่ว่า M จะมีค่ามากเท่าใดก็ตาม เรายังคงหา x ที่อยู่ใกล้ ๆ a ได้ ทั้งที่มากกว่า a และน้อยกว่า a และทำให้ $f(x)$ มีค่าน้อยกว่า $-M$ ดังรูป 1.2.6



รูป 1.2.6

จะเห็นว่าเมื่อกำหนดจำนวนจริงลบ $-M$ โดยที่ $M > 0$ ลงบนแกน y จะมี x ที่อยู่ระหว่าง $a-\delta$ และ $a+\delta$ ที่ทำให้

$$f(x) < -M \qquad (1.2.15)$$

และไม่ว่า M จะมีค่ามากเท่าใด ก็ยังคงหา δ ที่เล็กพอที่ทำให้ (1.2.15) เป็นจริงเมื่อ $a-\delta < x < a+\delta$ จึงสรุปเป็นบทนิยามได้ดังนี้

บทนิยาม 1.2.9 ให้ f เป็นฟังก์ชันและมีบางช่วงเปิดรอบค่าคงตัว a ที่ f ได้นิยามไว้ทุกจุดใน ช่วงนี้ ซึ่งอาจยกเว้นได้ที่ a เรากล่าวว่า **ลิมิตของ** $f(x)$ **เมื่อ** x **เข้าใกล้** a **มีค่าเท่ากับ** $-\infty$ และเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ ถ้าสำหรับแต่ละจำนวนจริงบวก M มีจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้

$$f(x) < -M$$

สำหรับทุก ๆ x ซึ่ง $0 < |x-a| < \delta$

ตัวอย่าง 1.2.10 จงแสดงว่า $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

วิธีทำ กำหนดให้ M เป็นจำนวนจริงบวก เลือก $\delta \le \frac{1}{\sqrt{M}}$ จะได้ว่าเมื่อ x สอดคล้องกับสมการ

$0 < |x-0| < \delta$ หรือ ก็คือ $|x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$ ซึ่งสมมูลกับ $|x|^2 < \frac{1}{M}$

เนื่องจาก $|x|^2 = x^2 = |x^2|$ จึงได้ว่า $|f(x)-L| = |\frac{1}{x^2}| = \frac{1}{|x|^2} > M$ ❍

แบบฝึกหัด 1.2

1. จงใช้บทนิยาม 1.2.1 ในการแสดงว่าลิมิตเป็นจริงในข้อต่อไปนี้

   1.1 $\lim\limits_{x\to 3}(4x-5) = 7$ 1.2 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x} = 1$

2. จงใช้บทนิยาม 1.2.3 ในการแสดงว่าลิมิตด้านเดียวเป็นจริงในข้อต่อไปนี้

   2.1 $\lim\limits_{x\to 4^+}\sqrt{x-4} = 0$ 2.2 $\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{-x} = 0$

   2.3 $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 2$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} x & , x > 2 \\ 3x & , x \le 2 \end{cases}$

   2.4 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 3$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & , x > 1 \\ x+2 & , x < 1 \end{cases}$

3. จงใช้บทนิยาม 1.2.5 และบทนิยาม 1.2.6 ในการแสดงว่าลิมิตเป็นจริงในข้อต่อไปนี้

   3.1 $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x+2} = 0$ 3.2 $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{4x-1}{2x+5} = 2$

   3.3 $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x}{x+1} = 1$ 3.4 $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x}{x+1} = 1$

4. จงใช้บทนิยาม 1.2.8 และบทนิยาม 1.2.9 ในการแสดงว่าลิมิตเป็นจริงในข้อต่อไปนี้

4.1 $\lim_{x\to 3}\frac{-1}{(x-3)^2}=-\infty$ 4.2 $\lim_{x\to 1}\frac{1}{|x-1|}=+\infty$

5. ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงเปิด (a,b) เรากล่าวว่า **ลิมิตของ** $f(x)$ **เมื่อ** x **เข้าใกล้** a **ทางขวา มีค่าเท่ากับ** $-\infty$ และเขียนแทนด้วย $\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ ถ้าสำหรับแต่ละจำนวนจริงบวก M มีจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้

$$f(x)<-M$$

สำหรับทุก ๆ x ซึ่ง $a<x<a+\delta$

จากบทนิยามข้างต้น จงแสดงว่า $\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{1-x}=-\infty$

6. ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงเปิด (b,a) เรากล่าวว่า **ลิมิตของ** $f(x)$ **เมื่อ** x **เข้าใกล้** a **ทางซ้าย มีค่าเท่ากับ** $+\infty$ และเขียนแทนด้วย $\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ ถ้าสำหรับแต่ละจำนวนจริงบวก M มีจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้

$$f(x)>M$$

สำหรับทุก ๆ x ซึ่ง $a-\delta<x<a$

จากบทนิยามข้างต้น จงแสดงว่า $\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{1-x}=+\infty$

7. ให้ f เป็นฟังก์ชันที่ได้นิยามไว้บนช่วงอนันต์ $(a, +\infty)$ เรากล่าวว่า **ลิมิตของ** $f(x)$ **เมื่อ** $x\to+\infty$ **มีค่าเท่ากับ** $+\infty$ และเขียนแทนด้วย $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ถ้าสำหรับแต่ละจำนวนจริงบวก M มีจำนวนจริงบวก N ที่ทำให้

$$f(x)>M$$

สำหรับทุก ๆ x ซึ่ง $x>N$

จากบทนิยามข้างต้น จงแสดงว่า $\lim_{x\to+\infty}(x^2-3)=+\infty$

8. ให้ f เป็นฟังก์ชันที่ได้นิยามไว้บนช่วงอนันต์ $(-\infty,a)$ เรากล่าวว่า **ลิมิตของ** $f(x)$ **เมื่อ** $x\to-\infty$ **มีค่าเท่ากับ** $-\infty$ และเขียนแทนด้วย $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ถ้าสำหรับแต่ละจำนวนจริงบวก M มีจำนวนจริงบวก N ที่ทำให้

$$f(x)<-M$$

สำหรับทุก ๆ x ซึ่ง $x<-N$

จากบทนิยามข้างต้น จงแสดงว่า $\lim_{x\to-\infty}(x^3-5)=-\infty$

1.3 สมบัติและทฤษฎีบทของลิมิต

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาสมบัติบางประการของลิมิตของฟังก์ชัน เพื่อที่จะช่วยให้การหาลิมิตทำได้ง่ายขึ้น ทฤษฎีบทแรกที่จะกล่าวถึงนี้กล่าวว่า ถ้า $\lim_{x\to a} f(x)$ หาได้ แล้วจะมีหนึ่งเดียว ซึ่งจะเห็นว่าสอดคล้องกับแนวคิดเรื่องลิมิตที่ได้กล่าวไว้ตั้งแต่ต้นในหัวข้อ 1.1

ทฤษฎีบท 1.3.1 ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่ง $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ และ $\lim_{x\to a} f(x) = L_2$ เมื่อ L_1 , L_2 และ a เป็นค่าคงตัว แล้ว $L_1 = L_2$

บทพิสูจน์ จะขอละการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ไว้เป็นแบบฝึกหัด □

ทฤษฎีบท 1.3.2 ถ้า a และ k เป็นค่าคงตัว แล้ว $\lim_{x\to a} k = k$

นั่นคือ ลิมิตของฟังก์ชันค่าคงตัวเท่ากับค่าคงตัวนั้น

บทพิสูจน์ กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก เราจะหา $\delta > 0$ ที่ทำให้ $|k-k| < \varepsilon$ เมื่อใดก็ตามที่ x สอดคล้องกับอสมการ $0 < |x-a| < \delta$ แต่เนื่องจาก $0 = |k-k| < \varepsilon$ เสมอ โดยไม่ขึ้นกับค่า x ใดๆ ดังนั้นจึงเลือก δ เป็นจำนวนจริงบวกตัวใดก็ได้ ก็จะทำให้เราได้ตามที่ต้องการ □

ทฤษฎีบท 1.3.3 ถ้า a เป็นค่าคงตัว แล้ว $\lim_{x\to a} x = a$

บทพิสูจน์ กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก เลือก $0 < \delta \le \varepsilon$ ดังนั้นเมื่อ x สอดคล้องกับอสมการ $0 < |x-a| < \delta$ จะได้ $|f(x)-L| = |x-a| < \delta \le \varepsilon$ □

ทฤษฎีบท 1.3.4 ถ้า k, a และ L เป็นค่าคงตัว และ $\lim_{x\to a} f(x) = L$ แล้ว

$$\lim_{x\to a} kf(x) = k\lim_{x\to a} f(x) = kL$$

บทพิสูจน์ กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก เรามีสองกรณีที่จะพิจารณาดังนี้

<u>กรณี 1</u> $k = 0$: จะได้ $\lim_{x\to a} kf(x) = \lim_{x\to a} 0f(x) = \lim_{x\to a} 0 = 0 = 0L$

<u>กรณี 2</u> $k \ne 0$: จะได้ว่า $|k| > 0$ เราจะหา $\delta > 0$ ที่ทำให้ $|kf(x)-kL| < \varepsilon$ เมื่อ x สอดคล้องกับอสมการ

$$0 < |x-a| < \delta \tag{1.3.1}$$

จากข้อสมมติที่ว่า $\lim_{x\to a} f(x)=L$ ทำให้มี $\delta_1>0$ ที่ทำให้

$$|f(x)-L| < \frac{\varepsilon}{|k|}$$

เมื่อ x สอดคล้องกับอสมการ

$$0 < |x-a| < \delta_1 \qquad (1.3.2)$$

ดังนั้นจึงเลือก $0<\delta\le\delta_1$ เพื่อว่าเมื่อ x สอดคล้องกับ (1.3.1) แล้ว x จะสอดคล้องกับ (1.3.2) ด้วย ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$|kf(x)-kL| = |k||f(x)-L| < |k|\frac{\varepsilon}{|k|}=\varepsilon \qquad \square$$

ทฤษฎีบท 1.3.5 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่ง $\lim_{x\to a} f(x)=L_1$ และ $\lim_{x\to a} g(x)=L_2$ เมื่อ L_1, L_2 และ a เป็นค่าคงตัว แล้ว

1. $\lim_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)\pm \lim_{x\to a} g(x) = L_1\pm L_2$

นั่นคือ “ลิมิตของผลบวกหรือผลต่างของฟังก์ชันจะเป็นผลบวกหรือผลต่างของค่าลิมิต”

2. $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a} f(x)\lim_{x\to a} g(x)=L_1L_2$

นั่นคือ “ลิมิตของผลคูณของฟังก์ชันจะเป็นผลคูณของค่าลิมิต”

3. $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\frac{L_1}{L_2}$ เมื่อ $L_2\neq 0$

นั่นคือ “ลิมิตของผลหารของฟังก์ชันจะเท่ากับผลหารของค่าลิมิตถ้าค่าลิมิตของฟังก์ชันที่เป็นตัวหารไม่เป็นศูนย์”

4. $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก (ในกรณีที่ n เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ ค่า $f(x)$ ต้องมากกว่าหรือเท่ากับ 0 สำหรับทุก ๆ จุด x ใกล้ ๆ a)

นั่นคือ “ลิมิตของรากที่ n ของฟังก์ชันจะเท่ากับรากที่ n ของค่าลิมิตเมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ และค่า $f(x)$ จะต้องไม่น้อยกว่าศูนย์ สำหรับทุก ๆ จุด x ใกล้ ๆ a ในกรณีที่ n เป็นจำนวนเต็มบวกคู่”

บทพิสูจน์ เราจะพิสูจน์เฉพาะข้อ 1 เท่านั้น ส่วนการพิสูจน์ข้ออื่น ๆ ผู้สนใจศึกษาได้จากบรรณานุกรม

กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก เราจะแสดงว่ามีจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้

$$\left|\left(f(x)+g(x)\right)-\left(L_1+L_2\right)\right|<\varepsilon$$

เมื่อ x สอดคล้องกับอสมการ

$$0<\ |x-a|\ <\delta \tag{1.3.3}$$

แต่ทฤษฎีบทกำหนดว่า $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L_1$ และ $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_2$ เราจึงมี $\delta_1>0$ และ $\delta_2>0$ ที่ทำให้

$$|f(x)-L_1|\ <\ \tfrac{\varepsilon}{2} \tag{1.3.4}$$

เมื่อ x สอดคล้องกับอสมการ

$$0<\ |x-a|\ <\delta_1 \tag{1.3.5}$$

และ

$$|g(x)-L_2|\ <\ \tfrac{\varepsilon}{2} \tag{1.3.6}$$

เมื่อ x สอดคล้องกับอสมการ

$$0<\ |x-a|\ <\delta_2 \tag{1.3.7}$$

ตามลำดับ ดังนั้นเราจึงเลือก δ ของ (1.3.3) ให้น้อยกว่า δ_1 และ δ_2 เพื่อว่าเมื่อ x สอดคล้องกับ (1.3.3) แล้ว x จะสอดคล้องกับ (1.3.5) และ (1.3.7) ซึ่งจะทำให้ $f(x)$ และ $g(x)$ สอดคล้องกับ (1.3.4) และ (1.3.6) ตามลำดับ นั่นคือเลือก δ ดังนี้

$$\delta\ \le\ \min\{\delta_1,\delta_2\}$$

ซึ่งทำให้ได้

$$\begin{aligned}\left|\left(f(x)+g(x)\right)-\left(L_1+L_2\right)\right| &= \left|\left(f(x)-L_1\right)+\left(g(x)-L_2\right)\right| \\ &\le |f(x)-L_1|+|g(x)-L_2|\ <\ \tfrac{\varepsilon}{2}+\tfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

ดังนั้น โดยบทนิยามของลิมิต จะได้ว่า

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=L_1+L_2$$

จากผลที่ได้นี้กอปรกับ ทฤษฎีบท 1.3.4 เราก็จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right) &= \lim_{x\to a}\left(f(x)+(-g(x))\right)=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a}(-g(x)) \\ &= \lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)=L_1-L_2\end{aligned}$$

□

หมายเหตุ ถ้า A เป็นเซตของจำนวนจริง เราใช้สัญลักษณ์ $\min A$ แทนจำนวนจริงตัวน้อยสุดของสมาชิกใน A นั่นคือ $\min A \in A$ และ $\min A \le x$ สำหรับทุก ๆ สมาชิก x ใน A

ถ้า A เป็นเซตจำกัด นั่นคือ $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับใด ๆ เราอาจแทน $\min A$ ด้วย $\min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ หรือ $\min(x_1, x_2, \dots, x_n)$

ข้อสังเกต แม้ว่าทฤษฎีบท 1.3.5 จะกล่าวสำหรับฟังก์ชันเพียงสองฟังก์ชันเท่านั้นก็ตาม แต่ผลของทฤษฎีบทก็ยังคงเป็นจริงสำหรับฟังก์ชัน n ฟังก์ชัน เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก นั่นคือถ้า $f_1, f_2, \dots, f_n$ เป็นฟังก์ชัน n ฟังก์ชัน ซึ่ง

$$\lim_{x\to a} f_1(x),\ \lim_{x\to a} f_2(x)\ ,\ .\ .\ .\ .\ ,\ \lim_{x\to a} f_n(x)$$

หาได้ทั้งหมดแล้ว

$$\lim_{x\to a}[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x) \pm \lim_{x\to a} f_2(x) \pm \dots \pm \lim_{x\to a} f_n(x)$$

และ

$$\lim_{x\to a}[f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot \dots \cdot f_n(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x)\cdot \lim_{x\to a} f_2(x)\cdot \dots \cdot \lim_{x\to a} f_n(x) \qquad (1.3.8)$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่งถ้า $f_1, f_2, \dots, f_n$ เป็นฟังก์ชันเดียวกันให้ชื่อว่า f แล้ว (1.3.8) จะกลายเป็น

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n \qquad (1.3.9)$$

ซึ่งผลของ (1.3.9) และทฤษฎีบท 1.3.2 ทำให้ได้ว่า

$$\lim_{x\to a} x^n = \left[\lim_{x\to a} x\right]^n = a^n$$

ผลของทฤษฎีบท 1.3.5 ยังคงเป็นจริงสำหรับลิมิตซ้าย ลิมิตขวาและลิมิตเมื่อตัวแปรอิสระเข้าใกล้ค่าอนันต์ จึงจะกล่าวรวมเป็นทฤษฎีบทโดยไม่พิสูจน์ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.3.6 ให้ "lim" แทนได้ด้วย $\lim\limits_{x\to a}$, $\lim\limits_{x\to a^-}$, $\lim\limits_{x\to a^+}$, $\lim\limits_{x\to +\infty}$ หรือ $\lim\limits_{x\to -\infty}$ อย่างใดอย่างหนึ่ง ถ้า $L_1 = \lim f(x)$ และ $L_2 = \lim g(x)$ โดยที่ f และ g เป็นฟังก์ชัน L_1 และ L_2 เป็นค่าคงตัว แล้ว

1. $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = L_1 \pm L_2$
2. $\lim[f(x)\cdot g(x)] = \lim f(x)\cdot \lim g(x) = L_1 \cdot L_2$
3. $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, $L_2 \ne 0$

4. $\lim\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ และ $L_1 \geq 0$ ในกรณีที่ n เป็นจำนวนเต็มคู่

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของการหาลิมิตของฟังก์ชันโดยใช้ทฤษฎีบท 1.3.6

ตัวอย่าง 1.3.7 จงหา $\lim\limits_{x\to5}(x^2-4x+3)$

วิธีทำ $\lim\limits_{x\to5}(x^2-4x+3) = \lim\limits_{x\to5}x^2 - \lim\limits_{x\to5}4x + \lim\limits_{x\to5}3$

$$= \left(\lim_{x\to5}x\right)^2 - 4\lim_{x\to5}x + \lim_{x\to5}3 \quad = 5^2-4(5)+3 = 8$$

บทนิยาม 1.3.8 สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ จะเรียกฟังก์ชัน P ซึ่งนิยามโดย

$$P(x) = c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1x + c_0$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ และ $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_1, c_0$ เป็นค่าคงตัว ว่า **พหุนาม** (polynomial) และจะเรียกฟังก์ชัน f ว่า **ฟังก์ชันตรรกยะ** (rational function) เมื่อ $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ โดยที่ P และ Q ต่างเป็นพหุนาม

ตัวอย่าง 1.3.9 จงแสดงว่า ลิมิตของพหุนามเท่ากับค่าของพหุนามที่จุดนั้น

นั่นคือ $$\lim_{x\to a}(c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1x + c_0) = c_na^n + c_{n-1}a^{n-1} + \ldots + c_1a + c_0$$

วิธีทำ $\lim\limits_{x\to a}(c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1x + c_0) = \lim\limits_{x\to a}c_nx^n + \lim\limits_{x\to a}c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \lim\limits_{x\to a}c_1x + \lim\limits_{x\to a}c_0$

$$= c_n\lim_{x\to a}x^n + c_{n-1}\lim_{x\to a}x^{n-1} + \ldots + c_1\lim_{x\to a}x + \lim_{x\to a}c_0$$

$$= c_na^n + c_{n-1}a^{n-1} + \ldots + c_1a + c_0$$

ข้อสังเกต โดยการประยุกต์ผลของตัวอย่าง 1.3.9 กับการคำนวณลิมิตในตัวอย่าง 1.3.7 ก็จะได้ผลเหมือนกัน ดังนี้

$$\lim_{x\to5}(x^2-4x+3) = \lim_{x\to5}P(x) = P(5) = 5^2-4(5)+3 = 8$$

ตัวอย่าง 1.3.10 จงหา $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{5x^3+4}{x-3}$

วิธีทำ การหาลิมิตในตัวอย่างนี้ จะประยุกต์ผลของตัวอย่าง 1.3.9 และทฤษฎีบท 1.3.5 ข้อ 3 ดังนี้

$$\lim_{x\to2}\frac{5x^3+4}{x-3} = \frac{\lim\limits_{x\to2}5x^3+4}{\lim\limits_{x\to2}x-3} = \frac{5(2)^3+4}{2-3} = -44$$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นการให้ลักษณะเฉพาะของลิมิตสองทางในรูปของลิมิตทางเดียว ซึ่งสอดคล้องกับแนวคิดของลิมิตที่กล่าวไว้ในหัวข้อ 1.1 เช่นกัน

ทฤษฎีบท 1.3.11 ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามบนช่วงเปิดรอบ a แต่อาจไม่นิยามที่ a และ L เป็นค่าคงตัว แล้ว $\lim_{x\to a} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$

บทพิสูจน์ ($\Leftarrow$) กำหนดให้

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L \tag{1.3.10}$$

และ ε เป็นจำนวนจริงบวก เราต้องการพิสูจน์ว่า $\lim_{x\to a} f(x) = L$ นั่นคือจะหา $\delta > 0$ ที่ทำให้

$$|f(x) - L| < \varepsilon \tag{1.3.11}$$

เมื่อ x สอดคล้องกับอสมการ

$$0 < |x - a| < \delta \tag{1.3.12}$$

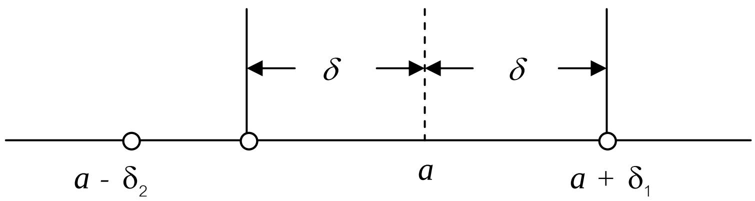
แต่เพราะ (1.3.10) ดังนั้นจะมี $\delta_1 > 0$ และ $\delta_2 > 0$ ที่ทำให้ (1.3.11) เป็นจริง เมื่อใดก็ตามที่ x สอดคล้องกับอสมการ

$$a < x < a + \delta_1 \tag{1.3.13}$$

และ

$$a - \delta_2 < x < a \tag{1.3.14}$$

ตามลำดับ เราจึงเลือก $\delta \le \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ดังรูป 1.3.1 เพื่อว่าเมื่อใดก็ตามที่ x สอดคล้องกับ (1.3.12) แล้ว x จะสอดคล้องกับ (1.3.13) และ (1.3.14) ด้วยและทำให้ได้ (1.3.11) และขอให้สังเกตว่ารูป 1.3.1 แสดงให้เห็นในกรณี $\delta = \delta_1$



รูป 1.3.1

($\Rightarrow$) สมมติว่า $\lim_{x\to a} f(x)=L$ และให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก ดังนั้นจะมี $\delta>0$ ที่ทำให้ $|f(x)-L|<\varepsilon$ เมื่อใดก็ตามที่ x สอดคล้องกับอสมการ

$$0<|x-a|<\delta \qquad (1.3.15)$$

ซึ่ง x สอดคล้องกับ (1.3.15) ก็ต่อเมื่อ x สอดคล้องกับ

$$a-\delta<x<a \quad \text{และ} \quad a<x<a+\delta$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า $\lim_{x\to a^+} f(x)=L$ และ $\lim_{x\to a^-} f(x)=L$ □

ยังมีสมบัติของลิมิตที่สำคัญเกี่ยวกับอสมการอยู่อีกสมบัติหนึ่งซึ่งเราจะกล่าวไว้ ณ ที่นี้ โดยขอละการพิสูจน์ แต่สำหรับประโยชน์และการประยุกต์ นักศึกษาจะได้พบในเรื่องอินทิกรัล ในวิชาแคลคูลัส 2 ต่อไป

ทฤษฎีบท 1.3.12 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามไว้ที่จุดใกล้ ๆ กับ a แต่อาจไม่นิยามที่ a และสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $\lim_{x\to a} f(x)$ และ $\lim_{x\to a} g(x)$ ทั้งสองหาได้

และ 2. $f(x)\le g(x)$ สำหรับทุก ๆ x ในโดเมนของ f และ g

แล้ว

1. $\lim_{x\to a} f(x)\le \lim_{x\to a} g(x)$

และ 2. ถ้า $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)$ และ h เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f(x)\le h(x)\le g(x)$ สำหรับทุก ๆ x ในโดเมนของ f และ g แล้ว $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} h(x)=\lim_{x\to a} g(x)$

บทพิสูจน์ จะขอละการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ไว้เป็นแบบฝึกหัด □

ต่อไปจะเป็นตัวอย่างอย่างง่ายตัวอย่างหนึ่งของการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบท 1.3.12 ในการหาลิมิตสำหรับตัวอย่างอื่นที่น่าสนใจ จะกล่าวถึงในหัวข้อต่อไป

ตัวอย่าง 1.3.13 จงแสดงว่า $\lim_{x\to 0} x^2(\sin^2 \frac{1}{x}) = 0$

วิธีทำ สำหรับ $x \neq 0$ จะได้ว่า $0 \le \sin^2 \frac{1}{x} \le 1$ ซึ่งเมื่อคูณตลอดอสมการด้วย $x^2 > 0$ จะได้

$$0 \le x^2 \sin^2 \frac{1}{x} \le x^2$$

แต่ $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ ทำให้ได้ว่า $\lim_{x\to 0} x^2(\sin^2 \frac{1}{x}) = 0$

แบบฝึกหัด 1.3

1. จงหาลิมิตในข้อต่อไปนี้

1.1 $\lim_{t\to 4} \dfrac{1}{t+3}$

1.2 $\lim_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2}$

1.3 $\lim_{x\to 2} \dfrac{2^2}{3^x}$

1.4 $\lim_{t\to -2} \sqrt{3t^2+4}$

1.5 $\lim_{x\to 1/3} (27x^3+9x+1)$

1.6 $\lim_{x\to 1} \left(\sqrt[3]{2-x} - \sqrt[3]{1-x}\right)$

1.7 $\lim_{t\to 1^-} \left(\sqrt{2-t} - \sqrt{1-t}\right)$

1.8 $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x+1}$

1.9 $\lim_{x\to 3^-} \dfrac{\sqrt{3-x}}{x^2+4}$

1.10 $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{(x+2)^3+1} + \sqrt{1+x}}{x-1}$

2. กำหนดให้ $\lim_{x\to a} f(x) = -4$ และ $\lim_{x\to a} g(x) = 7$ จงหาลิมิตต่อไปนี้

2.1 $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$

2.2 $\lim_{x\to a} [f(x) + f(x)g(x)]$

2.3 $\lim_{x\to a} [(f(x))^2 + 3f(x)f(x) + 5g(x)]$

2.4 $\lim_{x\to a} \dfrac{\sqrt{g(x)+f(x)}}{2-g(x)}$

1.4 เทคนิคการคำนวณลิมิต

การคำนวณลิมิตของฟังก์ชัน ส่วนใหญ่ใช้ทฤษฎีบทของลิมิตดังเช่นตัวอย่างในหัวข้อ 1.3 แต่ยังคงมีเทคนิคอื่น ๆ ซึ่งใช้กับแต่ละลักษณะของฟังก์ชันที่ไม่สอดคล้องกับทฤษฎีบทของลิมิตอีกเช่นกัน ในหัวข้อนี้จะรวบรวมเทคนิคที่สำคัญและใช้กันแพร่หลายพอสังเขป

ตัวอย่าง 1.4.1 จงหา $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

วิธีทำ การหาลิมิตในตัวอย่างนี้ จะทำเช่นเดียวกับในหัวข้อ 1.3 ไม่ได้ เนื่องจากทฤษฎีบท 1.3.5 ข้อ 3 ไม่รวมกรณีที่ $L_2 = 0$ และถ้าเราแทนค่า $x = 2$ ในนิพจน์ $\dfrac{x^2-4}{x-2}$ เราจะได้นิพจน์ที่ไม่มีความหมายในรูป $\dfrac{0}{0}$ ซึ่งทำให้สรุปผลอย่างใดไม่ได้ แต่เพราะว่าลิมิตเมื่อ x เข้าใกล้ 2 เราพิจารณาเมื่อ $x \neq 2$ ทำให้ได้ว่า $x-2 \neq 0$ สำหรับทุก ๆ x ในช่วงที่กำลังพิจารณา ดังนั้น

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 2+2 = 4$$ ❍

ข้อสังเกต เราหาลิมิตในตัวอย่าง 1.4.1 โดยการเอา $x-2$ หารทั้งเศษและส่วน ดังนี้

$$\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = x+2 \quad \text{สำหรับทุก ๆ } x \neq 2$$

ดังนั้นฟังก์ชัน h และ f ซึ่งนิยามตามลำดับโดย

$$h(x) = \frac{x^2-4}{x-2} \qquad \text{และ} \qquad f(x) = x+2$$

แม้จะเป็นฟังก์ชันที่ต่างกัน เนื่องจากฟังก์ชันทั้งสองมีโดเมนไม่เท่ากัน แต่ลิมิตของทั้งสองฟังก์ชัน เมื่อ x เข้าใกล้ 2 เท่ากัน จึงสามารถเขียนได้ว่า

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \lim_{x\to 2}(x+2)$$

เทคนิคการคำนวณลิมิต 1

การคำนวณลิมิตของฟังก์ชันในรูป $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ เมื่อ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ (โดยเฉพาะ $\dfrac{f(a)}{g(a)}$ อยู่ในรูป $\dfrac{0}{0}$) ต้องอาศัยวิธีทางพีชคณิตในการกำจัดพจน์ที่ทำให้ $g(x)$ เป็นศูนย์

ตัวอย่าง 1.4.2 จงหา $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

วิธีทำ ด้วยเหตุผลเดียวกับตัวอย่าง 1.4.1 แต่ในกรณีนี้เราไม่สามารถแยกตัวประกอบได้ เราจึงพยายามแปลงรูปเศษส่วน ด้วยการทำให้ตัวเศษไม่มีเครื่องหมายกรณฑ์ ดังนี้

$$\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{(x+1)-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} \quad \text{สำหรับทุก ๆ } x\neq 0$$

เมื่อแทนค่า $x=0$ ใน $\sqrt{x+1}+1$ แล้วจะไม่ได้ค่าของนิพจน์เป็นศูนย์อีก จึงประยุกต์ทฤษฎีบท 1.3.5 ข้อ 3 ได้ เพราะฉะนั้น

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}$$

ตัวอย่าง 1.4.3 จงหาลิมิตในข้อต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2}}{x}$ 2. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{4+\sqrt{x}}-2}$ 3. $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x+1}}$

วิธีทำ 1. สำหรับโจทย์ข้อนี้ เราจะจัดรูปนิพจน์ใหม่ ดังนี้

$$\frac{\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2}}{x} = \frac{2-2-x}{2x(2+x)} = -\frac{1}{2(x+2)} \quad \text{เมื่อ } x\neq 0$$

เพราะฉะนั้น

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2}}{x} = \lim_{x\to 0}-\frac{1}{2(x+2)} = -\frac{1}{4}$$

2. $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4+\sqrt{x}}-2} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}(\sqrt{4+\sqrt{x}}+2)}{(\sqrt{4+\sqrt{x}}-2)(\sqrt{4+\sqrt{x}}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}(\sqrt{4+\sqrt{x}}+2)}{4+\sqrt{x}-4} = \lim_{x\to 0^+}(\sqrt{4+\sqrt{x}}+2)$$

$$= \sqrt{4}+2 = 4$$

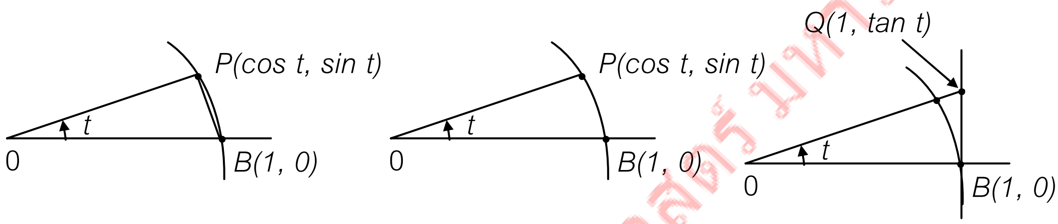
3. $$\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2-1}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to -1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to -1^+}(x-1)\sqrt{x+1} = 0$$

เทคนิคการคำนวณลิมิต 2

ถ้า $f(x) \le g(x) \le h(x)$ สำหรับทุก ๆ x ในช่วงเปิด $(a-\delta, a+\delta)$ ที่ไม่รวม a ช่วงหนึ่ง และ $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x)$ แล้ว $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x)$

ตัวอย่าง 1.4.4 จงแสดงว่า $\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

วิธีทำ พิจารณาวงกลมหนึ่งหน่วยและให้ t เป็นมุมที่วัดจากแกน x ทางด้านบวก ทวนเข็มนาฬิกาขึ้นไป โดยที่ $0 < t < \frac{\pi}{2}$ ดังรูป 1.4.1



รูป 1.4.1

ดังนั้นแขนของมุม t จะตัดวงกลมหนึ่งหน่วยที่จุด $P(\cos t, \sin t)$ และพบเส้นตั้งฉากกับแกน x ซึ่งผ่านจุด $B(1,0)$ ที่ $Q(1, \tan t)$ เราจึงได้ความสัมพันธ์

$$0 < \text{พื้นที่ของ } \Delta OBP < \text{พื้นที่ของจักรภาค } OBP < \text{พื้นที่ของ } \Delta OBQ$$

และเพราะพื้นที่ของจักรภาค OBP เท่ากับ $\frac{1}{2}$(ความกว้างของมุม)(รัศมี)^2 ทำให้ได้

$$0 < \frac{1}{2}(1)(\sin t) < \frac{1}{2}(t)(1)^2 < \frac{1}{2}(1)(\tan t) \quad \text{หรือ} \quad 0 < \frac{\sin t}{2} < \frac{t}{2} < \frac{\tan t}{2}$$

เมื่อคูณตลอดด้วย $\frac{2}{\sin t} > 0$ จะได้

$$1 < \frac{t}{\sin t} < \frac{1}{\cos t} \quad \text{หรือ} \quad 1 > \frac{\sin t}{t} > \cos t \quad \text{เมื่อ } 0 < t < \frac{\pi}{2}$$

และด้วยการกระทำในลักษณะสมมาตรกับแกน x จะได้

$$1 > \frac{\sin t}{t} > \cos t \quad \text{เมื่อ} \quad -\frac{\pi}{2} < t < 0$$

เพราะฉะนั้น $\cos t < \frac{\sin t}{t} < 1$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ และ $t \ne 0$ แต่ $\lim_{t \to 0} \cos t = 1$ จึงได้ว่า

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$ ❍

ตัวอย่าง 1.4.5 ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงการหาลิมิตโดยอาศัยผลของตัวอย่าง 1.4.4

1. $$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)\left(\frac{1+\cos t}{1+\cos t}\right) = \lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{t(1+\cos t)}$$
$$= \left(\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\right)\left(\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{1+\cos t}\right) = (1)\left(\frac{0}{1+1}\right) = 0$$

2. $$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{2t} = \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = \frac{1}{2}$$

3. $$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(3\theta)}{\theta} = 3\lim_{3\theta\to 0}\frac{\sin(3\theta)}{3\theta} = 3$$

4. $$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = 1$$

5. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{ax}\,\frac{ax}{bx}\,\frac{bx}{\sin(bx)}$$ โดยที่ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$
$$= \frac{a}{b}\left(\lim_{ax\to 0}\frac{\sin(ax)}{ax}\right)\left(\lim_{bx\to 0}\frac{bx}{\sin(bx)}\right) = \frac{a}{b}(1)(1) = \frac{a}{b}$$

6. $$\lim_{y\to 0}\frac{\tan y}{y} = \lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin y}{y}\right)\left(\frac{1}{\cos y}\right) = \left(\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\right)\left(\frac{1}{\lim_{y\to 0}\cos y}\right) = 1$$

7. $$\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{1-\cos^2 y} = \lim_{y\to 0}\frac{y^2}{\sin^2 y} = \left(\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}\right)^2 = 1$$ ❍

เทคนิคการคำนวณค่าลิมิต *3*

ถ้าฟังก์ชัน f นิยามต่างกันเมื่อ $x \to a^-$ และเมื่อ $x \to a^+$ เราจะหา $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ แล้วพิจารณาว่าค่าทั้งสองเท่ากันหรือไม่

ตัวอย่าง 1.4.6 จงหาลิมิต ในข้อต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ เมื่อกำหนด $f(x) = \begin{cases} 2x - x^3 & , x < 1 \\ 2x^2 - 2 & , x \ge 1 \end{cases}$ 2. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x-2|}{x-2}$

วิธีทำ 1. เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(2x - x^3) = 1$ แต่ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(2x^2 - 2) = 0$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ หาไม่ได้

2. เช่นเดียวกันเมื่อจะหา $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x-2|}{x-2}$ เราพิจารณา

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} -\frac{(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}(-1) = -1$$

และ

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} 1 = 1$$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x-2|}{x-2}$ หาไม่ได้ ❍

ตัวอย่าง 1.4.7 จงหา $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|-1+x|-1}{x}$

วิธีทำ แม้ว่า

$$|-1+x| = \begin{cases} -1+x & , x \ge 1 \\ 1-x & , x < 1 \end{cases}$$

แต่โจทย์ต้องการหาลิมิตเมื่อ $x \to 0$ และโดยความหมายของลิมิต ทำให้เราสามารถพิจารณา x ในช่วงเปิด $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ซึ่งเป็นช่วงเปิดรอบ 0 เท่านั้น ซึ่งในช่วงเปิดดังกล่าว $-1+x < 0$ เสมอ ดังนั้นโดยนิยามของค่าสมบูรณ์ เราจะได้

$$\lim_{x\to 0} \frac{|-1+x|-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-(-1+x)-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-x-1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}(-1) = -1$$ ❍

เทคนิคการคำนวณค่าลิมิต 4

เทคนิคนี้จะเป็นการหา $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$ โดยที่ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\neq 0$ แต่ $\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=0$ และเราไม่สามารถใช้กระบวนการทางพีชคณิตที่จะเขียน $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{h(x)}{k(x)}$ โดยที่ $\lim\limits_{x\to a^+} k(x)\neq 0$ ได้ การคำนวนลิมิตดังกล่าวสามารถทำได้โดยอาศัยความจริงเกี่ยวกับลิมิตดังต่อไปนี้

(1) ถ้า $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{1}{g(x)}=+\infty$ และ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)>0$ แล้ว $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

(2) ถ้า $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{1}{g(x)}=+\infty$ และ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)<0$ แล้ว $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

(3) ถ้า $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{1}{g(x)}=-\infty$ และ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)>0$ แล้ว $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

(4) ถ้า $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{1}{g(x)}=-\infty$ และ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)<0$ แล้ว $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

สำหรับลิมิตทางซ้าย และลิมิตสองทางสามารถพิจารณาได้ในทำนองเดียวกัน

ตัวอย่าง 1.4.8 จงหา $\lim\limits_{x\to 4^+}\frac{2-x}{(x-4)(x+2)}$ และ $\lim\limits_{x\to 4^-}\frac{2-x}{(x-4)(x+2)}$

วิธีทำ การหาลิมิตของตัวอย่างนี้ไม่สามารถประยุกต์ทฤษฎีบท 1.3.5 ได้เช่นกันและฟังก์ชันในตัวอย่างก็ไม่สามารถใช้วิธีการทางพีชคณิตอื่นใดเช่นในตัวอย่างต่าง ๆ ข้างต้นเพื่อทำให้ลิมิตตัวหารไม่เป็นศูนย์ได้ เมื่อเป็นเช่นนี้เราจะพิจารณาลิมิตซ้ายและลิมิตขวาเมื่อ $x\to 4$ ของ $\frac{2-x}{(x-4)(x+2)}$ ดังต่อไปนี้

พิจารณา $\lim\limits_{x\to 4^+}\frac{2-x}{(x-4)(x+2)}$ จะเห็นว่า $\lim\limits_{x\to 4^+}\frac{2-x}{(x+2)}=-\frac{1}{3}$ และ $\lim\limits_{x\to 4^+}\frac{1}{x-4}=+\infty$ จึงได้ว่า

$$\lim_{x\to 4^+}\frac{2-x}{(x-4)(x+2)}=-\infty$$

ต่อไปพิจารณา $\lim\limits_{x\to 4^-}\frac{2-x}{(x-4)(x+2)}$ จะเห็นว่า $\lim\limits_{x\to 4^-}\frac{2-x}{(x+2)}=-\frac{1}{3}$ และ $\lim\limits_{x\to 4^-}\frac{1}{x-4}=-\infty$ จึงได้ว่า

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{2-x}{(x-4)(x+2)}=+\infty$$

❍

ตัวอย่าง 1.4.9 จงหา $\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{x^2}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{x\to 0}(x-1)=-1$ และ $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ จึงได้ว่า $\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{x^2}=-\infty$ ❍

ต่อไปเราจะกล่าวถึงการหาลิมิตของฟังก์ชันตรรกยะ ในขณะที่ x เข้าใกล้บวกอนันต์หรือลบอนันต์ แต่ก่อนอื่นจะพิจารณาลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้ก่อนคือ $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}$ และ $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}$ ซึ่งจะมีประโยชน์อย่างมากในการหาลิมิตประเภทนี้

พิจารณาค่าของฟังก์ชัน f ซึ่งนิยามโดย $f(x)=\frac{1}{x}$ เมื่อ $x\to+\infty$ ซึ่งจะเห็นชัดเมื่อแทนค่า x ที่ทำให้คำนวณ $\frac{1}{x}$ ได้ง่ายดังนี้

x	1	10	100	1000	10000	$\cdots$
$\frac{1}{x}$	1	0.1	0.01	0.001	0.0001	$\cdots$

และจะเห็นว่าค่าของ $\frac{1}{x}$ เข้าใกล้ 0 เมื่อ $x\to+\infty$ นั่นคือ

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

เช่นเดียวกันเมื่อพิจารณาค่าของฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย $\frac{1}{x}$ เมื่อ $x\to-\infty$ จะเห็นว่าค่าของ $\frac{1}{x}$ เข้าใกล้ 0 เมื่อ $x\to-\infty$ นั่นคือ

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

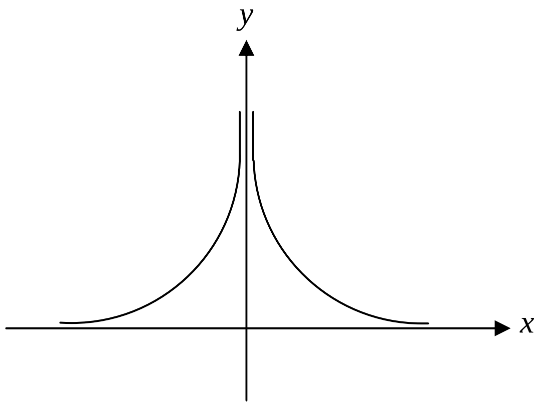
จากผลดังกล่าวและเมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\right)^n=0 \qquad (1.4.1)$$

และ

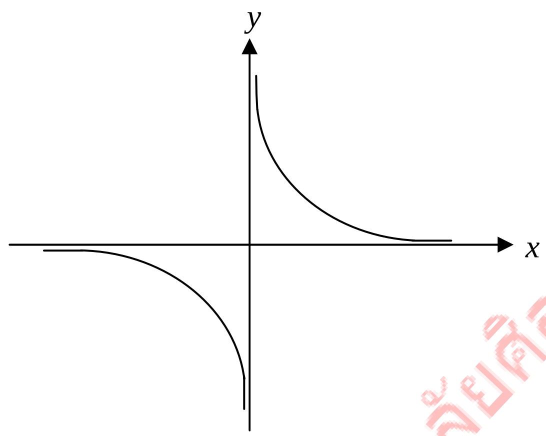
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\right)^n=0 \qquad (1.4.2)$$

ซึ่งผลของ (1.4.1) และ (1.4.2) อาจพิจารณาได้จากกราฟของฟังก์ชัน f ที่นิยามโดย $f(x)=\frac{1}{x^n}$ ดังรูป 1.4.2 และรูป 1.4.3



$y=\frac{1}{x^n}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกคู่

รูป 1.4.2



$y=\frac{1}{x^n}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกคี่

รูป 1.4.3

เทคนิคการคำนวณค่าลิมิต 5

ให้ $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ และ

$Q(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0$

เป็นพหุนามโดยที่ $a_n\neq 0$ และ $b_m\neq 0$ แล้วในการหา $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[k]{P(x)}}{\sqrt[j]{Q(x)}}$ โดยที่ j และ k เป็นจำนวนเต็มบวก สามารถทำได้โดยเขียน $P(x)$ และ $Q(x)$ ใหม่ในรูปต่อไปนี้ ตามลำดับ

$$P(x)=x^n\left(a_n+\frac{a_{n-1}x^{n-1}}{x^n}+\ldots+\frac{a_1x}{x^n}+\frac{a_0}{x^n}\right)=x^n\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\ldots+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}\right)$$

$$Q(x)=x^m\left(b_m+\frac{b_{m-1}x^{m-1}}{x^m}+\ldots+\frac{b_1x}{x^m}+\frac{b_0}{x^m}\right)=x^m\left(b_m+\frac{b_{m-1}}{x}+\ldots+\frac{b_1}{x^{m-1}}+\frac{b_0}{x^m}\right)$$

จากนั้นใช้ความจริงเกี่ยวกับลิมิตที่ว่า $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ ในการหา $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[k]{P(x)}}{\sqrt[j]{Q(x)}}$ ต่อไป

สำหรับ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[k]{P(x)}}{\sqrt[j]{Q(x)}}$ สามารถทำได้ในทำนองเดียวกัน โดยใช้ความจริงเกี่ยวกับลิมิตที่ว่า $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ แทน

ตัวอย่าง 1.4.10 จงหา $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+5}{6x-8}$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 1.3.5 จะได้ว่า

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+5}{6x-8} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3+\frac{5}{x}\right)}{x\left(6-\frac{8}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{5}{x}}{6-\frac{8}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3+\frac{5}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(6-\frac{8}{x}\right)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}3+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x}}{\lim\limits_{x\to+\infty}6-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{8}{x}} = \frac{3+5\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}{6-8\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}} = \frac{3+(5)(0)}{6-(8)(0)} = \frac{1}{2}$$

ตัวอย่าง 1.4.11 จงหา $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^2-x}{2x^3-5}$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 1.3.5 จะได้ว่า

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-x}{2x^3-5} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(4-\frac{1}{x}\right)}{x^3\left(2-\frac{5}{x^3}\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(4-\frac{1}{x}\right)}{x\left(2-\frac{5}{x^3}\right)} = \left(\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\right)\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{4-\frac{1}{x}}{2-\frac{5}{x^3}}\right)$$

$$= \left(\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\right)\left(\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4-\frac{1}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\frac{5}{x^3}\right)}\right) = (0)\left(\frac{4}{2}\right) = 0$$

ตัวอย่าง 1.4.12 จงหา $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\dfrac{4x^2+5x+2}{6x^2-8x+4}}$

วิธีทำ โดย ทฤษฎีบท 1.3.5 จะได้ว่า

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{4x^2+5x+2}{6x^2-8x+4}} = \sqrt[3]{\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+5x+2}{6x^2-8x+4}} = \sqrt[3]{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(4+\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(6-\frac{8}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}}$$

$$= \sqrt[3]{\lim_{x\to+\infty}\frac{4+\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}}{6-\frac{8}{x}+\frac{4}{x^2}}} = \sqrt[3]{\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4+\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(6-\frac{8}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}} = \sqrt[3]{\frac{4}{6}} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$$

ตัวอย่าง 1.4.13 จงหา $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-2x^4}{x+1}$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3-2x^4}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4\left(\frac{3}{x^4}-2\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}x^3\frac{\left(\frac{3}{x^4}-2\right)}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

และจาก $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ และ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{3}{x^4}-2\right)}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}=-2$ จึงได้ว่า $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3-2x^4}{x+1}=-\infty$ ❍

ตัวอย่าง 1.4.14 จงหา $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{7x^6+5x+10}}{x^2+8x+9}$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\frac{\sqrt{7x^6+5x+10}}{x^2+8x+9}=\frac{\sqrt{x^6\left(7+\frac{5}{x^5}+\frac{10}{x^6}\right)}}{x^2\left(1+\frac{8}{x}+\frac{9}{x^2}\right)}=\left(\frac{\sqrt{x^6}}{x^2}\right)\frac{\sqrt{7+\frac{5}{x^5}+\frac{10}{x^6}}}{1+\frac{8}{x}+\frac{9}{x^2}}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{\left(x^3\right)^2}}{x^2}\right)\frac{\sqrt{7+\frac{5}{x^5}+\frac{10}{x^6}}}{1+\frac{8}{x}+\frac{9}{x^2}}=\left(\frac{|x^3|}{x^2}\right)\frac{\sqrt{7+\frac{5}{x^5}+\frac{10}{x^6}}}{1+\frac{8}{x}+\frac{9}{x^2}}\quad \text{เมื่อ } x\neq 0$$

และเมื่อ $x\to+\infty$ ค่าของ x^3 จะมากกว่า 0 เสมอ ซึ่งทำให้ได้ว่า $|x^3|=x^3$ เราจึงได้ว่า

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{7x^6+5x+10}}{x^2+8x+9}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2}\right)\frac{\sqrt{7+\frac{5}{x^5}+\frac{10}{x^6}}}{1+\frac{8}{x}+\frac{9}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}x\frac{\sqrt{7+\frac{5}{x^5}+\frac{10}{x^6}}}{1+\frac{8}{x}+\frac{9}{x^2}}$$

พิจารณา $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{7+\frac{5}{x^5}+\frac{10}{x^6}}}{1+\frac{8}{x}+\frac{9}{x^2}}$ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{7+\frac{5}{x^5}+\frac{10}{x^6}}}{1+\frac{8}{x}+\frac{9}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{7+\frac{5}{x^5}+\frac{10}{x^6}}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{8}{x}+\frac{9}{x^2}\right)}=\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(7+\frac{5}{x^5}+\frac{10}{x^6}\right)}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{8}{x}+\frac{9}{x^2}\right)}=\sqrt{7}$$

และจาก $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ เราจึงได้ว่า

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{7x^6+5x+10}}{x^2+8x+9}=\lim_{x\to+\infty}x\frac{\sqrt{7+\frac{5}{x^5}+\frac{10}{x^6}}}{1+\frac{8}{x}+\frac{9}{x^2}}=+\infty$$ ❍

ตัวอย่าง 1.4.15 จงหา $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6}$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\frac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6}=\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(3-\frac{6}{x}\right)}=\left(\frac{\sqrt{x^2}}{x}\right)\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{3-\frac{6}{x}}=\left(\frac{|x|}{x}\right)\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{3-\frac{6}{x}} \quad \text{เมื่อ } x\neq 0$$

และเมื่อ $x\to-\infty$ ค่าของ x จะน้อยกว่า 0 เสมอ ซึ่งทำให้ได้ว่า $|x|=-x$ เราจึงได้ว่า

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x}{x}\right)\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{3-\frac{6}{x}}=\lim_{x\to-\infty}-\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{3-\frac{6}{x}}$$

ดังนั้น

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6}=-\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3-\frac{6}{x}\right)}=-\frac{1}{3}$$

❍

ตัวอย่าง 1.4.16 จงหา $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6}$

วิธีทำ โดยผลในตัวอย่าง 1.4.15 เราทราบว่า

$$\frac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6}=\left(\frac{|x|}{x}\right)\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{3-\frac{6}{x}} \quad \text{เมื่อ } x\neq 0$$

แต่ในตัวอย่างนี้ เราพิจารณาลิมิตเมื่อ $x\to+\infty$ ซึ่งค่าของ $x>0$ เสมอ เราจึงได้ $|x|=x$ ดังนั้น

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{|x|}{x}\right)\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{3-\frac{6}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x}\right)\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{3-\frac{6}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{3-\frac{6}{x}}=\frac{1}{3}$$

❍

ให้ $\lim$ แทน $\lim\limits_{x\to+\infty}$ หรือ $\lim\limits_{x\to-\infty}$ และ ∞ แทน $+\infty$ หรือ $-\infty$ อย่างใดอย่างหนึ่ง ในกรณีที่ $\lim f(x)=\infty$ และ $\lim g(x)=\infty$ เราจะได้ว่า $\lim(f(x)+g(x))=\infty$ แต่สำหรับ $\lim(f(x)-g(x))$ เราไม่สามารถสรุปได้ว่าหาได้หรือหาไม่ได้ ซึ่งจะได้ศึกษาต่อไปในบทที่ 4 อย่างไรก็ตาม เราจะให้ตัวอย่างในการหาลิมิตลักษณะนี้พอสังเขป

ตัวอย่าง 1.4.17 จงหา $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})$

วิธีทำ สังเกตว่า $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}=+\infty$ และ $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x}=+\infty$ เราจึงได้

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})=+\infty$$ ❍

ตัวอย่าง 1.4.18 จงหา $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+x}=+\infty$ และ $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x}=+\infty$ เราไม่สามารถสรุปเกี่ยวกับ $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$ ว่าลิมิตหาได้หรือหาไม่ได้ การหา $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$ สามารถทำได้วิธีหนึ่งดังนี้

เนื่องจาก

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+x}-\sqrt{x^2-x}) &= \lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{4+\frac{1}{x}}-|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)\\ &= \lim_{x\to-\infty}|x|\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)\end{aligned}$$

และจาก $\lim\limits_{x\to-\infty}|x|=+\infty$ และ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)=\sqrt{4}-1=1$ เราจึงได้

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+x}-\sqrt{x^2-x})=+\infty$$ ❍

ตัวอย่าง 1.4.19 $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$

วิธีทำ เช่นเดียวกันกับ ตัวอย่าง 1.4.18 เราไม่สามารถสรุปเกี่ยวกับ $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$ ว่าหาได้ หรือหาไม่ได้ ทั้งนี้เพราะว่า $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}=+\infty$ และ $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x}=+\infty$ และโดยใช้วิธีการในตัวอย่าง 1.4.18 ในการหา $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$ เราได้

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})=\lim_{x\to-\infty}|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)$$

แต่จาก $\lim_{x\to-\infty}|x|=+\infty$ และ $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)=1-1=0$ เราจึงไม่สามารถสรุปได้เช่นกันว่า $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$ ว่าหาได้ หรือหาไม่ได้ (ซึ่งลิมิตประเภทนี้จะได้ศึกษาต่อไปในบทที่ 4)

สำหรับการหา $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$ เราสามารถทำได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right) &= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x-x^2+x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}+|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=-1
\end{aligned}$$

❍

หมายเหตุ การหา $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})$ ในตัวอย่าง 4.1.17 และ $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$ ในตัวอย่าง 4.1.18 สามารถใช้วิธีการใน ตัวอย่าง 1.4.19 ได้เช่นกัน แต่เราไม่จำเป็นต้องใช้วิธีการดังกล่าว ทั้งนี้เพราะว่าวิธีการหาลิมิตที่ได้แสดงไว้ในตัวอย่างทั้งสองนั้นง่ายกว่ามาก

แบบฝึกหัด 1.4

1. จงหาลิมิตในข้อต่อไปนี้

1.1 $\lim_{h\to+\infty}(-2h)$

1.2 $\lim_{x\to5}\sqrt{x^3-3x-1}$

1.3 $\lim_{t\to-2}\frac{t^3+8}{t+2}$

1.4 $\lim_{x\to1^+}\frac{x^4-1}{x-1}$

1.5 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4x+4}{x^2+x-6}$

1.6 $\lim_{t\to1}\frac{t^3+t^2-5t+3}{t^3-3t+2}$

1.7 $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+12}$

1.8 $\lim_{x\to-\infty}\frac{x-2}{x^2+2x+1}$

1.9 $\lim_{s\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{3s^7-4s^5}{2s^7+1}}$

1.10 $\lim_{y\to+\infty}\frac{2-y}{\sqrt{7+6y^2}}$

1.11 $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3x^4+x}}{x^2-8}$

1.12 $\lim_{x\to3^+}\frac{x}{x-3}$

1.13 $\lim_{x\to3^-}\frac{x}{x-3}$

1.14 $\lim_{t\to-\infty}\frac{5-2t^3}{t^2+1}$

1.15 $\lim_{t\to+\infty}\frac{6-t^3}{6t^3+3}$

1.16 $\lim_{x\to3^-}\frac{1}{|x-3|}$

1.17 $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$

1.18 $\lim_{y\to2^-}\frac{(y-1)(y-2)}{y+1}$

2. กำหนดให้ g เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่นิยามโดย $g(t)=\begin{cases} t^2 & , \quad t\ge0 \\ t-2 & , \quad t<0 \end{cases}$

จงหา $\lim_{t\to0^-}g(t)$, $\lim_{t\to0^+}g(t)$ และ $\lim_{t\to0}g(t)$

3. จงหาลิมิต ในข้อต่อไปนี้

3.1 $\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{x}$

3.2 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x^2}{2x^2}$

3.3 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x^2}{x}$

3.4 $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

3.5 $\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x)}{x\cos(4x)}$

3.6 $\lim_{x\to0}\frac{\tan(ax)}{\sin(bx)}$

เมื่อ a และ b เป็นค่าคงตัวซึ่งไม่เป็นศูนย์ทั้งคู่

1.5 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

แม้เราจะเน้นว่าการหาลิมิตของฟังก์ชันที่จุดใดจุดหนึ่ง ไม่ใช่การคำนวณค่าหรือแทนค่าของฟังก์ชัน ณ จุดนั้น แต่มีกลุ่มของฟังก์ชันหลายกลุ่มที่เราสามารถคำนวณลิมิตด้วยค่าของฟังก์ชัน ณ จุดนั้น ตัวอย่างเช่น กลุ่มของพหุนามหรือฟังก์ชันเชิงกำลังเป็นต้น และในกลุ่มของฟังก์ชันที่มีลักษณะเช่นนี้ เราจะได้ว่า

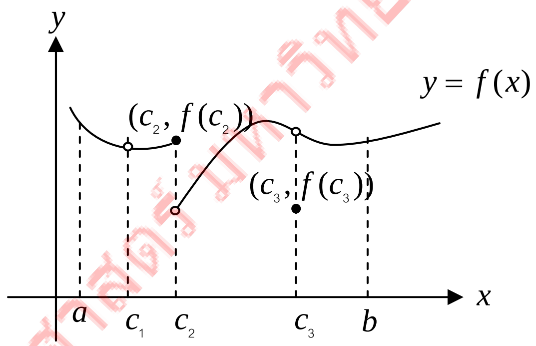
$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

ซึ่งหมายความว่าข้อ (1), (2) และ (3) ทั้งสามข้อต่อไปนี้เป็นจริงคือ

1. ฟังก์ชัน f นิยามที่ c
2. ลิมิต $\lim_{x\to c} f(x)$ หาได้

และ

3. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$



รูป 1.5.1

พิจารณากราฟจากรูป 1.5.1 พบว่าค่า $f(x)$ ไม่นิยามที่ $x = c_1$ แต่ที่ c_2 นั้น $\lim_{x\to c_2} f(x)$ หาไม่ได้ ส่วนที่ c_3 แม้ว่าค่าของ $f(x)$ จะนิยามเป็น $f(c_3)$ และ $\lim_{x\to c_3} f(x)$ หาได้ก็ตาม แต่ค่าทั้งสองก็ไม่เท่ากัน และเมื่อเราลากเส้นไปตามกราฟจะพบว่าเส้นที่ลากไปจะหยุดหรือต้องยกปากกาขึ้นเมื่อผ่านจุด c_1, c_2 หรือ c_3 ก่อนที่จะลากเส้นตามกราฟต่อไปได้ เราจึงกล่าวว่ากราฟลักษณะเช่นนี้ขาดความต่อเนื่อง

เราเรียกฟังก์ชันซึ่งสอดคล้องข้อ (1), (2) และ (3) ข้างต้นที่ c นั่นคือฟังก์ชันที่ลิมิตของฟังก์ชันที่ c เท่ากับค่าของฟังก์ชันที่ c (ฟังก์ชันที่ดังกล่าวจะมีเส้นกราฟไม่ขาดหรือแยกออกจากกันที่จุดที่ c) ว่าฟังก์ชันต่อเนื่องที่ c

บทนิยาม 1.5.1 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันและ c เป็นค่าคงตัว จะกล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันต่อเนื่อง** (continuous function) ที่ c ถ้าข้อความ (1), (2) และ (3) ต่อไปนี้เป็นจริงพร้อมกัน

1. $f(c)$ หาได้ นั่นคือฟังก์ชัน f นิยามที่ c
2. ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ c หาได้ นั่นคือมีจำนวนจริง L ซึ่ง $\lim_{x \to c} f(x) = L$

และ 3. $L = f(c)$

สำหรับฟังก์ชัน f ที่ไม่สอดคล้องกับข้อใดข้อหนึ่งในบทนิยาม 1.5.1 ที่ c เราจะกล่าวว่า f **ไม่ต่อเนื่องที่** c (discontinuous at c)

ถ้า D เป็นเซตย่อยของจำนวนจริงซึ่ง f ต่อเนื่องที่ทุก ๆ สมาชิกของ D เราจะกล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันต่อเนื่องบน** D หรือกล่าวสั้น ๆ ว่า f **ต่อเนื่องบน** D

หมายเหตุ เห็นได้อย่างชัดเจนว่า ถ้า f ต่อเนื่องบน D และ $D' \subseteq D$ แล้ว f ต่อเนื่องบน D' ด้วย

จากบทนิยามของลิมิต ทำให้เขียนบทนิยามของฟังก์ชันต่อเนื่องที่สมนัยกับบทนิยาม 1.5.1 ได้ดังนี้

บทนิยาม 1.5.2 ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ค่าคงตัว c ถ้าสำหรับแต่ละจำนวนจริงบวก ε จะมีจำนวนจริงบวก δ โดยที่

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

สำหรับทุก ๆ x ซึ่ง $|x - c| < \delta$

ตัวอย่าง 1.5.3 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่นิยามตามลำดับโดย

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \qquad \text{และ} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & , x \neq 2 \\ 3 & , x = 2 \end{cases}$$

จงแสดงว่าทั้ง f และ g เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x = 2$

วิธีทำ f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x = 2$ เนื่องจาก $f(2)$ ไม่นิยาม ส่วน g เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x = 2$ เนื่องจาก $g(2) = 3$ ในขณะที่

$$\lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4$$

ทำให้ได้

$$\lim_{x \to 2} g(x) \neq g(2)$$ ❍

ในกรณีที่ฟังก์ชัน f นิยามบนช่วงปิด $[a,b]$ จะเห็นว่า $\lim_{x\to a^-} f(x)$ และ $\lim_{x\to b^+} f(x)$ ไม่นิยาม ดังนั้นโดยบทนิยามของความต่อเนื่อง เราไม่สามารถระบุความต่อเนื่อง หรือความไม่ต่อเนื่องของฟังก์ชัน f ที่จุด a และ b ซึ่งเป็นจุดปลายของช่วงปิด $[a,b]$ ได้ เพื่อจะให้ครอบคลุมกรณีดังกล่าว เราจำเป็นต้องให้บทนิยามของความต่อเนื่องทางขวา และความต่อเนื่องทางซ้าย ดังต่อไปนี้

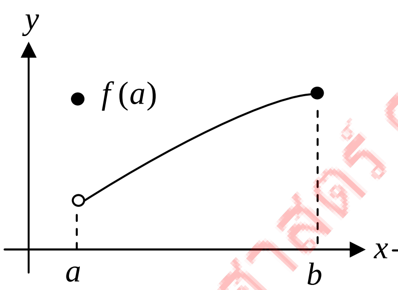
บทนิยาม 1.5.4 ฟังก์ชัน f เป็น**ฟังก์ชันต่อเนื่องทางขวา** (ทางซ้าย) ที่ c ถ้าเงื่อนไขต่อไปนี้เกิดขึ้นคือ

1. $f(c)$ หาได้
2. $\lim_{x\to c^+} f(x)$ หาได้ ($\lim_{x\to c^-} f(x)$ หาได้)

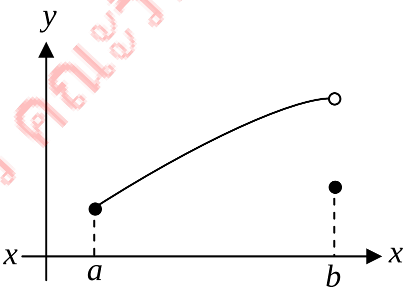
และ 3. $\lim_{x\to c^+} f(x) = f(c)$ ($\lim_{x\to c^-} f(x) = f(c)$)

และกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ เมื่อ

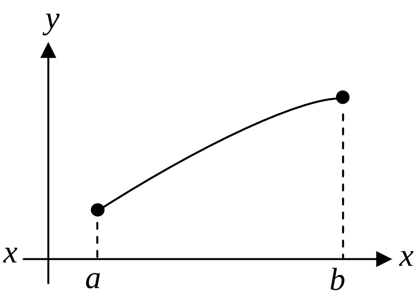
1. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงเปิด (a,b)
2. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทางขวาที่ a และ
3. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทางซ้ายที่ b



รูป 1.5.2



รูป 1.5.3



รูป 1.5.4

พิจารณากราฟของฟังก์ชันในรูป 1.5.2 ถึงรูป 1.5.4 ซึ่งเป็นกราฟของฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงปิด $[a,b]$ จากกราฟ จะเห็นได้อย่างชัดเจนว่าฟังก์ชัน f ในแต่ละรูปต่อเนื่องบนช่วงเปิด (a,b)

ในรูป 1.5.2 ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องทางซ้ายที่ b แต่ไม่ต่อเนื่องทางขวาที่ a ในขณะที่ฟังก์ชัน f ในรูป 1.5.3 ต่อเนื่องทางขวาที่ a แต่ไม่ต่อเนื่องทางซ้ายที่ a และฟังก์ชัน f ในรูป 1.5.4 ต่อเนื่องทางขวาที่ a และต่อเนื่องทางซ้ายที่ b ดังนั้นฟังก์ชัน f ในรูป 1.5.4 ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ แต่ในสองรูปที่เหลือไม่ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$

ตัวอย่าง 1.5.5 จงแสดงว่าฟังก์ชัน f ที่นิยามโดย $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[-3,3]$

วิธีทำ จะเห็นว่าโดเมนของฟังก์ชัน f คือช่วงปิด $[-3,3]$ และที่แต่ละจุด c ในช่วงเปิด $(-3,3)$ เราจะได้โดยทฤษฎีบท 1.3.5 ว่า

$$\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c}\sqrt{9-x^2}=\sqrt{\lim_{x\to c}\left(9-x^2\right)}=\sqrt{9-c^2}=f(c)$$

สำหรับที่ $x=3$ ได้ว่า

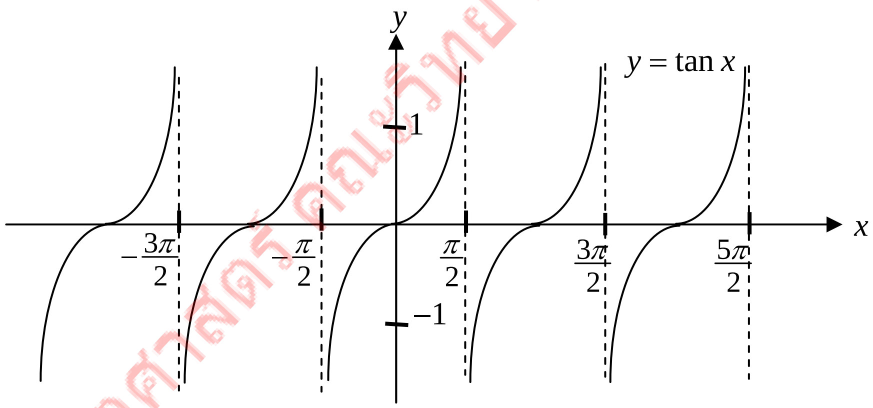
$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}\sqrt{9-x^2}=\sqrt{\lim_{x\to 3^-}\left(9-x^2\right)}=f(3)$$

และที่ $x=-3$ ได้ว่า

$$\lim_{x\to -3^+} f(x)=\lim_{x\to -3^+}\sqrt{9-x^2}=\sqrt{\lim_{x\to -3^+}\left(9-x^2\right)}=f(-3)$$

ซึ่งแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $(-3,3)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทางซ้ายที่ $x=3$ และเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทางขวาที่ $x=-3$ จึงสรุปได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[-3,3]$ ❍

ตัวอย่าง 1.5.6 จากกราฟของฟังก์ชัน $f(x)=\tan x$ ในรูป 1.5.5 จงพิจารณาว่า f ต่อเนื่องที่ใดบ้าง



รูป 1.5.5

วิธีทำ จากรูป 1.5.5 จะเห็นว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทุก ๆ จุดยกเว้นที่ $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ เนื่องจาก $f(x)=\tan x$ ไม่นิยามที่ $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ❍

จากตัวอย่าง 1.3.9 เราจะได้ทฤษฎีบท 1.5.7 ต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.5.7 พหุนามเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตของจำนวนจริง

ทฤษฎีบท 1.5.8 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ c เมื่อ c เป็นค่าคงตัว แล้ว

1. $f \pm g$ และ fg เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ c
2. $\dfrac{f}{g}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ c ถ้า $g(c) \neq 0$

บทพิสูจน์ 1. เป็นผลโดยตรงของทฤษฎีบท 1.3.5

2. ถ้า $g(c) = 0$ จะทำให้ $\dfrac{f}{g}$ เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ c เนื่องจาก $\dfrac{f(c)}{g(c)}$ หาไม่ได้

สมมติว่า $g(c) \neq 0$ โดยทฤษฎีบท 1.3.5 ข้อ 3 จะได้

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)} = \left(\frac{f}{g}\right)(c)$$

ซึ่งทำให้ได้ $\dfrac{f}{g}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ c □

ตัวอย่าง 1.5.9 ให้ h เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $h(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$ จงพิจารณาว่า h เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ค่าคงตัวใดบ้าง

วิธีทำ เนื่องจากทั้งเศษและส่วนของฟังก์ชัน h เป็นพหุนาม ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 1.5.7 ทำให้ทราบว่าพหุนามทั้งสองเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และโดยทฤษฎีบท 1.5.8 ข้อ 2 ทำให้ทราบว่า h เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x สำหรับทุก ๆ x ยกเว้นที่ $x \neq 2$ และ $x \neq 3$ ซึ่งเป็นรากของสมการ $x^2 - 5x + 6 = 0$ ❍

ตัวอย่าง 1.5.9 เป็นกรณีเฉพาะของฟังก์ชันตรรกยะ เราจะกล่าวถึงความต่อเนื่องของฟังก์ชันตรรกยะโดยทั่วไปในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.5.10 ฟังก์ชันตรรยะ $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุก ๆ จำนวนจริง x ยกเว้นที่ x ซึ่ง $Q(x) = 0$

ในกรณีของฟังก์ชันที่นิยามเป็นช่วง นั่นคือฟังก์ชันที่มีการนิยามในรูปแบบ

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x) & , \ x < a \\ g_2(x) & , \ x \geq a \end{cases} \qquad (1.5.1)$$

ตัวอย่างเช่นฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์

$$f(x) = |g(x)| = \begin{cases} g(x) & , \ g(x) \geq 0 \\ -g(x) & , \ g(x) < 0 \end{cases}$$

เป็นต้น เราไม่แน่ใจว่าฟังก์ชันเหล่านี้จะหาลิมิตได้ที่ทุก ๆ สมาชิกในโดเมนของฟังก์ชันหรือไม่ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ที่จุดแบ่งช่วงของการนิยามค่าฟังก์ชัน เราจึงจำเป็นต้องมีทฤษฎีบทที่จะช่วยตัดสินได้ว่า ฟังก์ชันลักษณะเช่นนี้จะต่อเนื่องที่จุดซึ่งสงสัยหรือไม่ อย่างไร

ทฤษฎีบท 1.5.11 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีการนิยามดัง (1.5.1) แล้ว f ต่อเนื่องที่ a ก็ต่อเมื่อ

$$f(a) = \lim_{x\to a^-} g_1(x) = \lim_{x\to a^+} g_2(x)$$

บทพิสูจน์ จะละการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ไว้เป็นแบบฝึกหัด □

ตัวอย่าง 1.5.12 จงพิจารณาว่าฟังก์ชันซึ่งนิยามดังต่อไปนี้ ต่อเนื่องที่ใดบ้าง

1. $g(x) = \begin{cases} 5-x, & -1 \le x \le 2 \\ x^2-1, & 2 < x \le 3 \end{cases}$ 2. $f(x) = |x+4|$

วิธีทำ 1. โดยผลของทฤษฎีบท 1.5.7 พหุนามที่กำหนดโดย $g_1(x) = 5-x$ และ $g_2(x) = x^2-1$ ต่างเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[-1,2)$ และ $(2,3]$ ตามลำดับ ดังนั้นถ้าจะสรุปถึงความต่อเนื่องของ g บนช่วง $[-1,3]$ จึงเหลือเพียงตรวจสอบว่า g ต่อเนื่องที่ $x=2$ หรือไม่เท่านั้น ซึ่งจะเห็นว่า

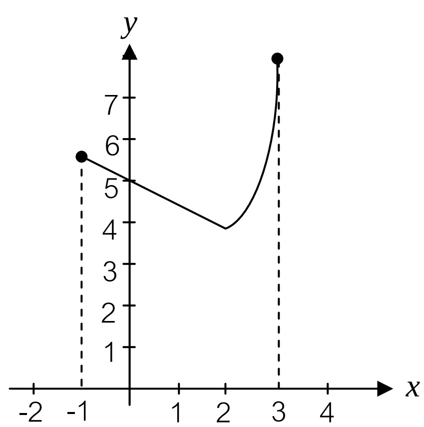
$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^-}(5-x) = 3$$

และ

$$\lim_{x\to 2^+} g(x) = \lim_{x\to 2^+}(x^2-1) = 3$$

ทำให้ได้ $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 3 = g(2)$ จึงสรุปได้ว่า g ต่อเนื่องที่ $x=2$

เพราะฉะนั้น g ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[-1,3]$ (กราฟของ g แสดงในรูป 1.5.6)



รูป 1.5.6

2. เนื่องจาก $f(x)=\begin{cases}-4-x \ , & x\le -4 \\ x+4 \ , & x>-4\end{cases}$

โดยผลของทฤษฎีบท 1.5.7 พหุนามที่กำหนดโดย $f_1(x)=-4-x$ และ $f_2(x)=x+4$ ต่างเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(-\infty,-4)$ และ $(-4,+\infty)$ ตามลำดับ ดังนั้นถ้าจะสรุปถึงความต่อเนื่องของ f บน $\mathbb{R}$ จึงเหลือเพียงการตรวจสอบว่า f ต่อเนื่องที่ $x=-4$ หรือไม่เท่านั้น ซึ่งจะเห็นว่า

$$\lim_{x\to -4^-} f(x) = \lim_{x\to -4^-}(-4-x)=0$$

และ
$$\lim_{x\to -4^+} f(x) = \lim_{x\to -4^+}(x+4)=0$$

ทำให้ได้ $\lim\limits_{x\to -4} f(x)=0=f(-4)$ ดังนั้น f ต่อเนื่องที่ $x=-4$ เราจึงได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $\mathbb{R}$

❍

ตัวอย่าง 1.5.13 จงพิจารณาว่าฟังก์ชันซึ่งนิยามดังต่อไปนี้ต่อเนื่องที่ใดบ้าง

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x-3}{x-3} \ , & x\ne 3 \\ 3 \ , & x=3\end{cases}$ 2. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

วิธีทำ 1. สำหรับ $x\ne 3$ เราจะได้ว่าฟังก์ชันตรรกยะ $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x-3}$ นิยามค่าได้ทุกจุด จึงสรุปโดยทฤษฎีบท 1.5.10 ได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุก ๆ จำนวนจริงซึ่งไม่เท่ากับ 3 และเราจะตรวจสอบความต่อเนื่องของ f ที่ $x=3$ โดยสังเกตว่าสำหรับ $x\ne 3$ เราจะได้

$$\frac{x^2-2x-3}{x-3} = \frac{(x-3)(x+1)}{x-3}=x+1$$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}(x+1)=4\ne f(3)$ แสดงว่า f ไม่ต่อเนื่องที่ $x=3$ ดังนั้น f ต่อเนื่องบน $\mathbb{R}\setminus\{3\}$

2. เนื่องจาก $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ เป็นฟังก์ชันตรรกยะ ดังนั้น f จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุก ๆ จำนวนจริงซึ่ง $x^2+1\ne 0$ และเพราะว่าไม่มีจำนวนจริง x ใดที่ทำให้ $x^2+1=0$ จึงสรุปว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $\mathbb{R}$

ตัวอย่าง 1.5.14 จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน f ซึ่งนิยามโดย

$$f(x)=\sqrt{3-x}$$

สำหรับทุก ๆ $x\le 3$ ต่อเนื่องที่ใดบ้าง

วิธีทำ เนื่องจากฟังก์ชัน f นิยามเฉพาะเมื่อ $x \le 3$ เราจะพิจารณาความต่อเนื่องของ f บนช่วง $(-\infty,3]$ เนื่องจาก $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ สำหรับทุก x ซึ่ง $x<3$ ดังนั้น f จึงต่อเนื่องที่ทุก ๆ x ซึ่ง $x<3$ และสำหรับ $x=3$ เราก็เพียงแต่พิจารณาว่า f ต่อเนื่องจากทางซ้ายที่ $x=3$ หรือไม่เท่านั้น และเพราะว่า

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \sqrt{3-x} = 0 = f(3)$$

ดังนั้น f ต่อเนื่องบนช่วง $(-\infty,3]$ ❍

เราจะจบหัวข้อนี้ด้วยการกล่าวถึงทฤษฎีบทที่สำคัญของความต่อเนื่องของฟังก์ชันและได้มีการนำไปประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวาง

ทฤษฎีบท 1.5.15 ในทฤษฎีบทนี้จะใช้สัญลักษณ์ "$\lim$" แทน $\lim\limits_{x\to c}$, $\lim\limits_{x\to c^-}$, $\lim\limits_{x\to c^+}$, $\lim\limits_{x\to +\infty}$ หรือ $\lim\limits_{x\to -\infty}$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

ถ้า $\lim g(x) = L$ และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ L แล้ว $\lim f(g(x)) = f(\lim g(x))$

บทพิสูจน์ จะแสดงว่า $\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(L)$ โดยกำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ L จะได้

$$\lim_{u\to L} f(u) = f(L)$$

โดยใช้ u เป็นตัวแปรของฟังก์ชัน f จะมี $\delta_1 > 0$ ที่ทำให้ $f(u)$ สอดคล้องกับอสมการ

$$|f(u) - f(L)| < \varepsilon \qquad (1.5.2)$$

เมื่อใดก็ตามที่ u สอดคล้องกับอสมการ

$$|u - L| < \delta_1 \qquad (1.5.3)$$

และเนื่องจาก $\lim_{x\to c} g(x) = L$ ดังนั้นจะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้

$$|g(x) - L| < \delta_1 \qquad (1.5.4)$$

เมื่อใดก็ตามที่ x สอดคล้องกับอสมการ

$$0 < |x - c| < \delta \qquad (1.5.5)$$

ให้ $u = g(x)$ แล้วเมื่อ x สอดคล้องกับ (1.5.5) จะได้ว่า $g(x)$ สอดคล้องกับ (1.5.4) ซึ่งก็คือ u สอดคล้องกับ (1.5.3) และทำให้ได้ $f(u)$ นั่นคือ $f(g(x))$ สอดคล้องกับ (1.5.2) ซึ่งเป็นอันจบการพิสูจน์ □

ตัวอย่าง 1.5.16 จงแสดงว่า ถ้า $\lim g(x)$ หาได้ แล้ว

1. $\lim(\sin(g(x))) = \sin(\lim g(x))$ และ $\lim(\cos(g(x))) = \cos(\lim g(x))$

2. $\lim|g(x)| = |\lim g(x)|$

วิธีทำ 1. เนื่องจากฟังก์ชันซายน์และโคซายน์เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $\mathbb{R}$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 1.5.15 ถ้า $\lim g(x)$ หาได้ เราจะได้

$$\lim(\sin(g(x))) = \sin(\lim g(x)) \quad \text{และ} \quad \lim(\cos(g(x))) = \cos(\lim g(x))$$

2. เนื่องจากฟังก์ชัน f ที่นิยามโดย $f(x) = |x|$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $\mathbb{R}$ ดังนั้นถ้า $\lim g(x)$ หาได้ แล้วโดยทฤษฎีบท1.5.15 จะได้ว่า

$$\lim|g(x)| = \lim f(g(x)) = f(\lim g(x)) = |\lim g(x)|$$ ❍

ตัวอย่าง 1.5.17 จากตัวอย่าง 1.5.16 เราได้

$$\lim_{x\to\pi}\left(\sin\left(\frac{x^2}{\pi+x}\right)\right) = \sin\left(\lim_{x\to\pi}\left(\frac{x^2}{\pi+x}\right)\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\left(\frac{\pi x^2+1}{x^2+3}\right)\right) = \cos\left(\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi x^2+1}{x^2+3}\right)\right) = \cos\left(\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi+1/x^2}{1+3/x^2}\right)\right) = \cos\pi = -1$$

และ

$$\lim_{x\to3}\left|5-x^2\right| = \left|\lim_{x\to3}(5-x^2)\right| = |-4| = 4$$ ❍

ตัวอย่าง 1.5.18 จงหาลิมิตในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^2-9}{x-3}\right)^3$ 2. $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x^2-x+13}$

วิธีทำ 1. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย $f(x)=x^3$ และ $g(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ ตามลำดับ เนื่องจาก

$$\lim_{x\to 3} g(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6$$

และ f ซึ่งเป็นพหุนาม เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $\mathbb{R}$ ดังนั้น

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-9}{x-3}\right)^3=\lim_{x\to 3} f(g(x))=f\left(\lim_{x\to 3} g(x)\right)=f(6)=6^3=216$$

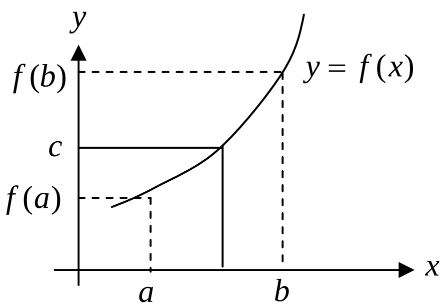
2. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย $f(x)=\sqrt{x}$ และ $g(x)=x^2-x+13$ แล้วจาก $\lim\limits_{x\to 4}(x^2-x+13)=25$ และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[0,+\infty)$ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to 4}\sqrt{x^2-x+13}=\sqrt{\lim_{x\to 4}(x^2-x+13)}=\sqrt{25}=5$$

❍

ทฤษฎีบท 1.5.19 (ทฤษฎีบทค่ากลาง : Intermediate Value Theorem)

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ ถ้า c เป็นค่าคงตัวซึ่งอยู่ระหว่าง $f(a)$ และ $f(b)$ [นั่นคือ $f(a)<c<f(b)$ หรือ $f(b)<c<f(a)$] แล้วจะมี $x_0\in[a,b]$ ซึ่ง $f(x_0)=c$



รูป 1.5.8

รูป 1.5.8 แสดงความหมายทางเรขาคณิตของทฤษฎีบทค่ากลางว่าถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ และถ้าเราทราบค่าของ $f(a)$ และ $f(b)$ แล้วเราจะทราบว่าค่าที่อยู่ระหว่างสองค่านี้เป็นค่าของฟังก์ชัน f ที่จุด ๆ หนึ่งในโดเมนของ f นั่นคือทุกค่าที่อยู่ระหว่าง $f(a)$ และ $f(b)$ อยู่ในเรนจ์ของ f ทฤษฎีบทค่ากลางมีประโยชน์ในการพิสูจน์ผลที่น่าสนใจมากมาย ตัวอย่างเช่นการหารากของพหุนาม ดังจะแสดงให้เห็นเป็นตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.5.20 จงแสดงว่ารากของพหุนาม $P(x) = x^3 + x^2 + x - 1$ อยู่ในช่วง $[0, 1]$

วิธีทำ เนื่องจากพหุนามเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง จึงทำให้ $P(x) = x^3 + x^2 + x - 1$ ต่อเนื่องบน $[0, 1]$ และเราคำนวณได้ว่า

$$P(0) = -1 < 0 < 2 = P(1)$$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบทค่ากลางจะมี $x_0 \in [0, 1]$ ซึ่ง $P(x_0) = 0$ แสดงว่า $x_0 \in [0, 1]$ เป็นรากของ $P(x)$

❍

ตัวอย่าง 1.5.21 จงแสดงว่ามี $x < 0$ ที่ทำให้ $2^x = x^2$

วิธีทำ พิจารณาฟังก์ชัน h ซึ่งนิยามโดย $h(x) = 2^x - x^2$ สำหรับทุก ๆ $x \in [-1, 0]$ เนื่องจากฟังก์ชันเชิงกำลังและพหุนามเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ทำให้ได้ว่า h ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[-1, 0]$ และเราคำนวณได้ว่า

$$h(-1) = 2^{-1} - (-1)^2 = \tfrac{1}{2} - 1 = -\tfrac{1}{2} \qquad \text{และ} \qquad h(0) = 2^0 - 0^2 = 1 - 0 = 1$$

ซึ่งทำให้ได้

$$h(-1) = -\tfrac{1}{2} < 0 < 1 = h(0)$$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบทค่ากลาง จะมี $x \in [-1, 0]$ (หรือ $x < 0$) ที่ทำให้

$$h(x) = 0 \qquad \text{หรือ} \qquad 2^x = x^2$$

❍

แบบฝึกหัด 1.5

1. จงหาจุดในเซตของจำนวนจริงของแต่ละฟังก์ชันที่ทำให้ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องจากฟังก์ชันค่าจริงที่กำหนดในแต่ละข้อต่อไปนี้

   1.1 $f(x)=\frac{x^2}{x^2-3x+2}$ 1.2 $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$

   1.3 $f(x)=\begin{cases} x-2 & , \quad x<4 \\ 2x-6 & , \quad x>4 \end{cases}$ 1.4 $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & , \quad x\le 0 \\ x+1 & , \quad x>0 \end{cases}$

2. ฟังก์ชันที่กำหนดในข้อต่อไปนี้ไม่นิยามที่ $x=0$ จึงเป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x=0$ จงพิจารณาว่าเราจะนิยามค่าของ $f(0)$ ในแต่ละข้อเหล่านี้เพื่อทำให้ฟังก์ชันที่ถูกนิยามขึ้นใหม่ต่อเนื่องที่ $x=0$ ได้หรือไม่

   2.1 $f(x)=\frac{x}{|x|}$ 2.2 $f(x)=\frac{x^2+2x}{x}$

   2.3 $f(x)=\frac{|\sin x|}{x}$ 2.4 $f(x)=x(1+\frac{1}{x})$

3. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย $f(x)=\begin{cases} ax+b & , \quad x\le 1 \\ cx^2+dx+e & , \quad x>1 \end{cases}$ เมื่อ a,b,c,d และ e เป็นค่าคงตัว จงหาความสัมพันธ์ของ a,b,c,d และ e เพื่อทำให้ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ 1

4. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย $f(x)=\begin{cases} \frac{a}{x} & , \quad 0<x<1 \\ bx+1 & , \quad 1\le x\le 2 \\ cx^2 & , \quad x>2 \end{cases}$

   จงหาค่าคงตัว a, b และ c ที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $(0,\infty)$

5. จงสร้างฟังก์ชัน f และ g ซึ่งฟังก์ชันทั้งสองต่างเป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x=c$ แต่ฟังก์ชัน $f+g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=c$

6. ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[0,\ 1]$ โดยที่ $f(0)=a$ และ $f(1)=b$ เมื่อ $0\le a$ และ $b\le 1$ จงแสดงว่าสมการ $x=f(x)$ มีรากอย่างน้อยรากหนึ่งในช่วง $[0,\ 1]$