

เอกสารประกอบการสอน
รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน 4091109

ผศ.วชิรารักษ์ โออรรัมย์

สาขาวิชาคณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์

2560

เอกสารประกอบการสอน
รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน 4091109

ผศ.วชิรารักษ์ โออรรัมย์
(วท.ม. คณิตศาสตร์ศึกษา)

สาขาวิชาคณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์

2560

คำนำ

เอกสารประกอบการสอน รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน รหัส 4091109 นี้ ถูกกำหนดให้มีขึ้นในหลักสูตรคณิตศาสตร์คณะวิทยาศาสตร์มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์เป็นรายวิชาพื้นฐาน หลากหลายหลักสูตรในระดับปริญญาตรีที่ปรับปรุงขึ้นใหม่เพื่อให้สอดคล้องกับสภาพการศึกษาที่เปลี่ยนไปรวมถึงความซับซ้อนในรายวิชาของแต่ละหลักสูตร และสามารถพัฒนาศักยภาพของนักศึกษาเรียนรู้รายวิชาขั้นสูงต่อไป

จุดมุ่งหมายของรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานมุ่งเน้นให้นักศึกษาเรียนรู้หลักการทางคณิตศาสตร์พื้นฐาน ไม่ว่าจะเป็น จำนวนจริง พหุนามและการแยกตัวประกอบ ระบบสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร ฟังก์ชันและสัญลักษณ์ของฟังก์ชัน ฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลัง โดยมีวัตถุประสงค์ให้นักศึกษาสามารถนำความรู้ไปประยุกต์ใช้ในการเรียนรู้สามารถแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ

ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่าเอกสารประกอบการสอนฉบับนี้จะอำนวยความสะดวกให้กับผู้ที่สนใจและผู้ที่เกี่ยวข้องในวิชาคณิตศาสตร์ขอขอบพระคุณ บิดา มารดา และครอบครัวที่เป็นกำลังใจทำให้มาถึงตรงจุดนี้ครูอาจารย์ที่ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้แก่ข้าพเจ้า เอกสารและตำราที่ข้าพเจ้าได้ศึกษารวมถึงอ้างอิงจนเกิดเอกสารเล่มนี้ มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์ที่ให้โอกาสดีๆ ตลอดจนเพื่อนร่วมงานทุกคนที่ให้คำแนะนำ แบ่งปัน ทั้งงานวิชาการและประสบการณ์การทำงาน

วชิราลักษณ์ โอสรรัมย์
ธันวาคม 2560

สารบัญ

เรื่อง	หน้า
คำนำ	(1)
สารบัญ	(2)
สารบัญรูปภาพ	(4)
แผนบริหารการสอน	(5)
แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 1	1
บทที่ 1 จำนวนจริง	3
1.1 จำนวนจริง	3
1.2 เลขยกกำลัง	20
1.3 ราก	29
สรุปท้ายบทที่ 1	28
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1	40
เอกสารอ้างอิง	42
แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 2	41
บทที่ 2 พหุนามและการแยกตัวประกอบ	43
2.1 นิพจน์พีชคณิต	43
2.2 การแยกตัวประกอบพหุนาม	47
2.3 สมการและอสมการ	77
สรุปท้ายบทที่ 2	89
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2	90
เอกสารอ้างอิง	91
แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 3	93
บทที่ 3 ระบบสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร	95
3.1 ระบบพิกัดฉาก	95
3.2 กราฟและสมการเส้นตรง	109
3.3 ระบบสมการเส้นสองตัวแปร	117
3.4 กราฟอสมการเส้นตรงสองตัวแปร	126
สรุปท้ายบทที่ 3	131
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3	133
เอกสารอ้างอิง	136

สารบัญ(ต่อ)

เรื่อง	หน้า
แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 4	137
บทที่ 4 ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน	139
4.1 ความสัมพันธ์	140
4.2 ความสัมพันธ์ผกผัน	143
4.3 ฟังก์ชัน	144
4.4 ชนิดของฟังก์ชัน	145
4.5 ฟังก์ชันผกผัน	147
4.6 ฟังก์ชันประกอบ	148
4.7 พิษคณิตของฟังก์ชัน	150
สรุปท้ายบทที่ 4	151
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4	152
เอกสารอ้างอิง	153
แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 5	155
บทที่ 5 ฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลัง	157
5.1 ฟังก์ชันชี้กำลัง	157
5.2 ฟังก์ชันลอการิทึม	162
สรุปท้ายบทที่ 5	173
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 5	174
เอกสารอ้างอิง	175
บรรณานุกรม	176

สารบัญรูปภาพ

ภาพประกอบ	หน้า
ภาพประกอบ 1.1 ภาพแสดงโครงสร้างของจำนวนจริง	4
ภาพประกอบ 2.1 แสดงเส้นจำนวนจริง	82
ภาพประกอบ 3.1 แสดงว่าจุด A เป็นโปรเจกชันของจุด E บนเส้น u	95
ภาพประกอบ 3.2 แสดงพิกัดฉากแบบคาร์ทีเซียน	96
ภาพประกอบ 3.3 แสดงการหาระยะทางระหว่างจุด P_1 และ P_2	100
ภาพประกอบ 3.4 แสดงมุม θ เป็นมุมเอียงของเส้นตรง L	103
ภาพประกอบ 3.5 แสดงความชันของเส้นตรง L_1, L_2 และ L_3	103
ภาพประกอบ 3.6 แสดงกราฟของสมการเชิงเส้น	118
ภาพประกอบ 3.7 แสดงคำตอบของสมการเชิงเส้น $ax + by = c$	120
ภาพประกอบ 3.8 ครึ่งระนาบปิด $2x + 3y \geq 12$	127
ภาพประกอบ 3.9 ครึ่งระนาบเปิด $2x + 3y < 12$	127
ภาพประกอบ 4.1 แสดงภาพฟังก์ชัน $y = f(x)$	145
ภาพประกอบ 4.2 แสดงแผนผังการประกอบของฟังก์ชัน	148
ภาพประกอบ 4.3 แสดงฟังก์ชันประกอบ $g \circ f$	149

รายละเอียดของรายวิชา

ชื่อสถาบันอุดมศึกษา	มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์
วิทยาเขต/คณะ/ภาควิชา	คณะวิทยาศาสตร์ สาขาวิชา คณิตศาสตร์ Faculty of Science Mathematic

หมวดที่ 1 ข้อมูลทั่วไป

1. รหัสและชื่อรายวิชา	รหัสวิชา 4091101	ชื่อรายวิชา คณิตศาสตร์พื้นฐาน
2. จำนวนหน่วยกิต	3 หน่วยกิต	3(3-0-6) (บรรยาย-ปฏิบัติ-ศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง)
3. หลักสูตรและประเภทของรายวิชา		
3.1 สำหรับ ☒ หลักสูตร วิทยาศาสตร์บัณฑิต (คณิตศาสตร์)		
สำหรับ ☐ หลายหลักสูตร		
3.2 ☒ ประเภทของรายวิชา	☐ ศึกษาทั่วไป	
	☒ วิชาเฉพาะ กลุ่มวิชา ☒ แกน ☐ เอกบังคับ ☐ เอกเลือก	
	☐ วิชาเลือกเสรี	
4. อาจารย์ผู้รับผิดชอบรายวิชา		
4.1 อาจารย์ผู้รับผิดชอบรายวิชา		
ผศ.วชิราภักษ์ โอสรรัมย์		
4.2 อาจารย์ผู้สอน		
ผศ.วชิราภักษ์ โอสรรัมย์		
ผศ.ดร.สาธิต ผลเจริญ		
5. ภาคการศึกษา / ชั้นปีที่เรียน		
ภาคการศึกษาที่ ☒ 1 ☐ 2 ชั้นปีที่เรียน ชั้นปีที่ 1 ปีการศึกษา 2560		
6. รายวิชาที่ต้องเรียนมาก่อน (pre-requisite) (ถ้ามี)		
ไม่มี		
7. รายวิชาที่ต้องเรียนพร้อมกัน (co-requisites) (ถ้ามี)		
ไม่มี		
8. สถานที่เรียน		
ชั้น อาคาร 5 มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์		
9. วันที่จัดทำหรือปรับปรุงรายละเอียดของรายวิชาครั้งล่าสุด		
ภาคการศึกษาที่ ☒ 1 ☐ 2 ปีการศึกษา 2558 วันที่ 20 กรกฎาคม 2559		

หมวดที่ 2 จุดมุ่งหมายและวัตถุประสงค์

1. จุดมุ่งหมายของรายวิชา 1. เพื่อให้นักศึกษามีจิตสำนึกและตระหนักในการปฏิบัติตามจรรยาบรรณทางวิชาการและวิชาชีพ 2. เพื่อให้นักศึกษามีความรู้ ความเข้าใจในหลักการ ทฤษฎี ตามเนื้อหาของรายวิชา 3. เพื่อให้นักศึกษามีความรู้พื้นฐานทางวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ที่จะนำมาอธิบายหลักการและทฤษฎีในศาสตร์เฉพาะ 4. เพื่อให้นักศึกษาสามารถคิดวิเคราะห์อย่างเป็นระบบและมีเหตุผลตามหลักการและวิธีการทางคณิตศาสตร์ 5. เพื่อให้นักศึกษานำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปประยุกต์กับสถานการณ์ต่าง ๆ ได้ถูกต้องเหมาะสม 6. มีความใฝ่รู้ สามารถวิเคราะห์และสังเคราะห์ความรู้จากแหล่งข้อมูลต่าง ๆ ที่หลากหลายได้อย่างถูกต้องและเพื่อนำไปสู่การสร้างนวัตกรรม
2. วัตถุประสงค์ในการพัฒนา/ปรับปรุงรายวิชา เพื่อพัฒนาการเรียนการสอนและความรู้ให้ทันยุคสมัย

หมวดที่ 3 ลักษณะและการดำเนินการ

1. คำอธิบายรายวิชา (Course Description) คณิตศาสตร์พื้นฐาน จำนวนจริง เลขยกกำลัง ราก นิพจน์พีชคณิต พหุนามการแยกตัวประกอบ สมการ อสมการ ระบบพิกัดฉาก กราฟเส้นตรงระบบสมการเส้นตรงสองตัวแปร กราฟอสมการเส้นตรงสองตัวแปร ฟังก์ชันและสัญลักษณ์ของฟังก์ชัน ฟังก์ชันพหุนาม พีชคณิตของฟังก์ชัน ฟังก์ชันเอกโปเนนเชียล ลอการิทึม กราฟของฟังก์ชันเอกโปเนนเชียล ลอการิทึม ฟังก์ชันลอการิทึมธรรมชาติ สมบัติลอการิทึม			
2. จำนวนชั่วโมงที่ใช้ต่อภาคการศึกษา			
บรรยาย	สอนเสริม (ถ้ามี)	การฝึกปฏิบัติ/งานภาคสนาม/การฝึกงาน	การศึกษาด้วยตนเอง
48 ชั่วโมงต่อภาคการศึกษา	ไม่มี	ไม่มี	ไม่มี
3. จำนวนชั่วโมงต่อสัปดาห์ที่อาจารย์ให้คำปรึกษาและแนะนำทางวิชาการแก่นักศึกษาเป็นรายบุคคล 1 อาจารย์ประจำรายวิชาประกาศเวลาให้คำปรึกษาที่หน้าห้องทำงานและในกลุ่ม facebook 2 นักศึกษาจองวันเวลาล่วงหน้าหรือมาพบตามนัด			

หมวดที่ 4 การพัฒนาผลการเรียนรู้ของนักศึกษา

1. คุณธรรม จริยธรรม		
คุณธรรม จริยธรรมที่ต้องพัฒนา	วิธีการสอนที่จะใช้พัฒนาการเรียนรู้	วิธีการประเมินผล
1.3 มีจิตสำนึกและตระหนักในการปฏิบัติตามจรรยาบรรณทางวิชาการและวิชาชีพ	1. ความตรงต่อเวลา 2. มอบหมายงานแล้วให้นักศึกษาตระหนักในการปฏิบัติตามจรรยาบรรณทางวิชาการและวิชาชีพโดยการไม่คัดลอกงานของคนอื่นมาเป็นของตนเองโดยประเมินผลจากการสุ่มตรวจการบ้านอย่างน้อย ครั้งในภาคเรียน	1.ประเมินจากพฤติกรรมการเข้าเรียน 2.ประเมินจากผลงาน
2. ความรู้		
ความรู้ที่ต้องได้รับ	วิธีการสอน	วิธีการประเมินผล
2.1 มีความรู้ ความเข้าใจในหลักการ ทฤษฎี ทางคณิตศาสตร์	1. ศึกษาเอกสารประกอบการสอน 2. บรรยาย 3. ทำแบบฝึกหัดตามใบงาน	1. ตรวจสอบจากการทำแบบฝึกหัด 2. สอบกลางภาค 3. สอบปลายภาค
2.2 มีความรู้พื้นฐานทางวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ที่จะนำมาอธิบายหลักการและทฤษฎีในศาสตร์เฉพาะ	1. ศึกษาเอกสารประกอบการสอน 2. บรรยาย 3. ทำแบบฝึกหัดตามใบงาน	1. ตรวจสอบจากการทำแบบฝึกหัด 2. สอบกลางภาค 3. สอบปลายภาค
3. ทักษะทางปัญญา		
ทักษะทางปัญญาที่ต้องพัฒนา	วิธีการสอน	วิธีการประเมินผล
3.1 สามารถคิดวิเคราะห์อย่างเป็นระบบและมีเหตุผลตามหลักการและวิธีการทางคณิตศาสตร์	1. ศึกษาเอกสารประกอบการสอน 2. บรรยาย 3. ทำแบบฝึกหัดตามใบงาน	1. ตรวจสอบจากการทำแบบฝึกหัด 2. สอบกลางภาค 3. สอบปลายภาค
3.2 นำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปประยุกต์กับสถานการณ์ต่าง ๆ ได้ถูกต้องเหมาะสม	1. ศึกษาเอกสารประกอบการสอน 2. บรรยาย 3. ทำแบบฝึกหัดตามใบงาน	1. ตรวจสอบจากการทำแบบฝึกหัด 2. สอบกลางภาค 3. สอบปลายภาค
3.3 มีความใฝ่รู้ สามารถวิเคราะห์และสังเคราะห์ความรู้จากแหล่งข้อมูลต่าง ๆ ที่หลากหลายได้อย่างถูกต้องและเพื่อนำไปสู่การสร้างนวัตกรรม	นักศึกษาค้นคว้าความรู้และสามารถนำมาวิเคราะห์พร้อมทั้งประยุกต์เข้ากับสถานการณ์และเขียนเป็นบทความเพื่อนำเสนอหน้าชั้นเรียน	สังเกตการนำเสนอหน้าชั้นเรียน

4. ทักษะความสัมพันธ์ระหว่างบุคคลและความรับผิดชอบ		
ทักษะความสัมพันธ์ระหว่างบุคคลและความรับผิดชอบที่ต้องการพัฒนา	วิธีการสอน	วิธีการประเมินผล
-	-	-
5. ทักษะการวิเคราะห์เชิงตัวเลข การสื่อสาร และการใช้เทคโนโลยีสารสนเทศ		
ทักษะการวิเคราะห์เชิงตัวเลข การสื่อสาร และการใช้เทคโนโลยีสารสนเทศที่ต้องพัฒนา	วิธีการสอน	วิธีการประเมินผล
-	-	-

6. การกิจอื่น ๆ ที่นำมาบูรณาการเข้ากับการเรียนการสอน

6.1 ผลงานวิจัย

ไม่มี

มีการนำความรู้และประสบการณ์จากผลงานวิจัยมาใช้ในการพัฒนาการเรียนการสอนโดยมีการดำเนินการ ดังนี้

.....ไม่มี.....

6.2 งานบริการวิชาการ ได้แก่ การจัดโครงการฝึกอบรม การเป็นวิทยากรทั้งภายในและภายนอกมหาวิทยาลัย การเป็นกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ การเป็นกรรมการผู้ทรงคุณวุฒิในการตรวจผลงานวิจัย การเป็นกรรมการผู้ทรงคุณวุฒิในการอ่านบทความวิชาการและอื่น ๆ

.....ไม่มี.....

มีการนำความรู้และประสบการณ์จากการบริการวิชาการมาใช้ในการพัฒนาการเรียนการสอนโดยมีการดำเนินการ ดังนี้

.....ไม่มี.....

6.3 งานทำนุบำรุงศิลปวัฒนธรรม ได้แก่ การผนวกเอาศิลปวัฒนธรรมท้องถิ่นไว้ในการเรียนการสอน เช่น การสอนโดยยกตัวอย่างสิ่งที่เกิดขึ้นในกระบวนการผลิตตามวิถีพื้นบ้าน การอ้างอิงถึงเครื่องมือพื้นบ้าน วัตถุดิบที่ใช้ในการผลิตที่มีเฉพาะในท้องถิ่น ภูมิปัญญาพื้นบ้านภาคเหนือ และอื่น ๆ

.....ไม่มี.....

มีการนำความรู้และประสบการณ์จากการทำนุบำรุงศิลปวัฒนธรรม มาใช้ในการพัฒนาการเรียนการสอนโดยมีการดำเนินการ ดังนี้

.....ไม่มี.....

6.4 ทรัพยากรหรือวิธีการใช้ในการพัฒนาทักษะภาษาอังกฤษของนักศึกษา

ตัวอย่างเช่น การใช้ text book การใช้บทความวิจัย/ บทความภาษาอังกฤษ การเข้าถึง website ที่เกี่ยวข้อง เป็นต้น

.....ไม่มี.....

มีการนำความรู้และประสบการณ์จากการนำทรัพยากรมาใช้ในการพัฒนาการเรียนการสอนโดยมีการดำเนินการ ดังนี้

.....ไม่มี.....

6.5 การบรรยายโดยมีผู้ที่มีประสบการณ์ทางวิชาการหรือวิชาชีพจากหน่วยงานหรือชุมชนภายนอก เรื่องที่บรรยาย/ ชื่อและสังกัดของวิทยากร/ วัน/เวลา/สถานที่บรรยาย

.....ไม่มี.....

6.6 การดำเนินงานนอกสถานที่ในรายวิชา ชื่อของหน่วยงาน /วัน/เวลาทำงาน

.....ไม่มี.....

หมวดที่ 5 แผนการสอนและการประเมินผล

.1แผนการสอน									
ลำดับ ที่	หัวข้อรายละเอียด/ หัวข้อรายละเอียด/	จำนวน ชั่วโมง/ ผู้สอน	กิจกรรมการเรียนรู้ การสอนสื่อที่ใช้/	การพัฒนาการเรียนรู้ของ นักศึกษา					
				1	2	3	4	5	
1	ชี้แจงรายวิชา วิธีการเรียนการสอน การวัดผลและประเมินผล บทที่ 1จำนวนจริง - จำนวนจริง	3	1. ศึกษาเอกสาร ประกอบการสอน 2. บรรยาย 3. ทำแบบฝึกหัด ตามใบงาน	✓	✓				
2	- เลขยกกำลัง	3	1. ศึกษาเอกสาร ประกอบการสอน 2. บรรยาย 3. ทำแบบฝึกหัด ตามใบงาน	✓	✓				
3	- ราก	3	1. ศึกษาเอกสาร ประกอบการสอน 2. บรรยาย 3. ทำแบบฝึกหัด ตามใบงาน	✓	✓				
4	บทที่ 2 พหุนามและการแยกตัว ประกอบ - นิพจน์พีชคณิต	3	1. ศึกษาเอกสาร ประกอบการสอน 2. บรรยาย 3. ทำแบบฝึกหัด ตามใบงาน	✓	✓				

สัปดาห์ ที่	หัวข้อรายละเอียด/	จำนวน ชั่วโมง/ ผู้สอน	กิจกรรมการเรียนรู้/ การสอนสื่อที่ใช้/	การพัฒนาการเรียนรู้ของ นักศึกษา				
				1	2	3	4	5
5	- อนุกรมการแยกตัวประกอบ	3	1. ศึกษาเอกสาร ประกอบการสอน 2. บรรยาย 3. ทำแบบฝึกหัด ตามใบงาน	✓	✓			
6	- สมการและอสมการ	3	1. ศึกษาเอกสาร ประกอบการสอน 2. บรรยาย 3. ทำแบบฝึกหัด ตามใบงาน	✓	✓			
7	บทที่ 3 ระบบสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร - ระบบพิกัดฉาก	3	1. ศึกษาเอกสาร ประกอบการสอน 2. บรรยาย 3. ทำแบบฝึกหัด ตามใบงาน	✓	✓			
8	- กราฟเส้นตรง	3	1. ศึกษาเอกสาร ประกอบการสอน 2. บรรยาย 3. ทำแบบฝึกหัด ตามใบงาน	✓	✓			
9	สัปดาห์กลางภาค							
10	- ระบบสมการเส้นตรงสองตัวแปร - กราฟสมการเส้นตรงสองตัวแปร	3	1. ศึกษาเอกสาร ประกอบการสอน 2. บรรยาย	✓	✓	✓		
11	บทที่ 4 ฟังก์ชันและสัญลักษณ์ ของฟังก์ชัน - ฟังก์ชันและสัญลักษณ์ของฟังก์ชัน - ฟังก์ชันพหุนาม	3	ศึกษาเอกสาร ประกอบการสอน พร้อมบรรยายและ มอบหมายงานให้ นักศึกษาโดยการยก กรณีศึกษาแล้วให้ นักศึกษานำเสนอ หน้าชั้นเรียน	✓		✓		

หมายเหตุ การพัฒนาการเรียนรู้ของนักศึกษา

1 = คุณธรรม จริยธรรม

2 = ความรู้

3 = ทักษะทางปัญญา

4 = ทักษะความสัมพันธ์ระหว่างบุคคลและความรับผิดชอบ

5 = ทักษะการวิเคราะห์เชิงตัวเลข การสื่อสาร และการใช้เทคโนโลยี

2. แผนการประเมินผลการเรียนรู้				
ที่	ผลการเรียนรู้*	วิธีการประเมิน	สัปดาห์ที่ประเมิน	สัดส่วนของการประเมิน
1	มีจิตสำนึกและตระหนักในการปฏิบัติตามจรรยาบรรณวิชาชีพ	1. ความตรงต่อเวลา 2. มอบหมายงานแล้วให้นักศึกษาตระหนักในการปฏิบัติตามจรรยาบรรณทางวิชาการและวิชาชีพโดยการไม่คัดลอกงานของคนอื่นมาเป็นของตนเองโดยประเมินผลจากการสุ่มตรวจการบ้านอย่างน้อย 2 ครั้งในภาคเรียน	ตลอดภาคการศึกษา สัปดาห์ที่ 8,15	15%
2	มีความรู้ในหลักการและทฤษฎีทางคณิตศาสตร์	1. ศึกษาเอกสารประกอบการสอน 2. บรรยาย 3. แก้โจทย์ปัญหาในชั้นเรียน 4. สนทนาซักถาม 5. ทำแบบฝึกหัดตามใบงาน	ตลอดภาคการศึกษา สัปดาห์ที่ 9,18	20%
3	มีความรู้พื้นฐานทางวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ที่จะนำมาอธิบายหลักการและทฤษฎีในศาสตร์เฉพาะ	1. ศึกษาเอกสารประกอบการสอน 2. บรรยาย 3. แก้โจทย์ปัญหาในชั้นเรียน 4. สนทนาซักถาม 5. ทำแบบฝึกหัดตามใบงาน	ตลอดภาคการศึกษา สัปดาห์ที่ 9,18	20%

ที่	ผลการเรียนรู้*	วิธีการประเมิน	สัปดาห์ที่ประเมิน	สัดส่วนของการประเมิน
4	สามารถคิดวิเคราะห์อย่างเป็นระบบและมีเหตุผลตามหลักการและวิธีการทางคณิตศาสตร์	1. ศึกษาเอกสารประกอบการสอน 2. บรรยาย 3. แก้โจทย์ปัญหาในชั้นเรียน 4. สนทนาซักถาม 5. ทำแบบฝึกหัดตามใบงาน	ตลอดภาคการศึกษา สัปดาห์ที่ 9,18	20%
5	นำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปประยุกต์กับสถานการณ์ต่าง ๆ ได้ถูกต้องและเหมาะสม	1. ศึกษาเอกสารประกอบการสอน 2. บรรยาย 3. แก้โจทย์ปัญหาในชั้นเรียน 4. สนทนาซักถาม 5. ทำแบบฝึกหัดตามใบงาน	ตลอดภาคการศึกษา สัปดาห์ที่ 9,18	20%
6	มีความใฝ่รู้ สามารถวิเคราะห์และสังเคราะห์ความรู้จากแหล่งข้อมูลต่าง ๆ ที่หลากหลายได้อย่างถูกต้องและเพื่อนำไปสู่การสร้างนวัตกรรม	มอบหมายงานให้นักศึกษาค้นคว้าการประยุกต์ใช้แคลคูลัสทำให้เกิดชิ้นงาน	สัปดาห์ที่ 16,17	5%
เกณฑ์การประเมินผล				
	81 % ขึ้นไป	ระดับคะแนน A	57 – 62 %	ระดับคะแนน C
	75 – 80 %	ระดับคะแนน B+	51 – 56 %	ระดับคะแนน D+
	69 – 74 %	ระดับคะแนน B	45 – 50 %	ระดับคะแนน D
	63 – 68 %	ระดับคะแนน C+	ต่ำกว่า 44 %	ระดับคะแนน F

หมวดที่ 6 ทรัพยากรประกอบการเรียนการสอน

1. ตำราและเอกสารหลัก วชิราภักษ์ โอสรรัมย์. (2560). <u>คณิตศาสตร์พื้นฐาน</u> . สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์
2. เอกสารและข้อมูลสำคัญ 2.1 www.google.co.th 2.2 ห้องสมุดสาขาวิชาคณิตศาสตร์2.3 facebook ชื่อกลุ่ม อ.วชิราภักษ์
3. เอกสารและข้อมูลแนะนำ ไม่มี
4. ภารกิจอื่น ๆ ที่นำมาบูรณาการเข้ากับการเรียนการสอน ไม่มี
4.1 ผลงานวิจัย ไม่มี
4.2 งานบริการวิชาการ ไม่มี
4.3 งานทำนุบำรุงศิลปวัฒนธรรม ไม่มี
5. ทรัพยากรหรือวิธีการใช้ในการพัฒนาทักษะภาษาอังกฤษของนักศึกษา ไม่มี
6. การบรรยายโดยผู้มีประสบการณ์ทางวิชาการหรือวิชาชีพจากหน่วยงานหรือชุมชนภายนอก ไม่มี
7. การดูงานนอกสถานที่ในรายวิชา ไม่มี

หมวดที่ 7 การประเมินและปรับปรุงการดำเนินการของรายวิชา

1. กลยุทธ์การประเมินประสิทธิผลของรายวิชาโดยนักศึกษา ใช้แบบประเมินผลการสอนของทางมหาวิทยาลัยโดยนักศึกษาเข้าไปประเมินในระบบ
2. กลยุทธ์การประเมินการสอน ใช้แบบประเมินผลการสอนของทางมหาวิทยาลัยโดยนักศึกษาเข้าไปประเมินในระบบ
3. การปรับปรุงการสอน ในการเรียนการสอนบูรณาการร่วมกับ learning by doing (เรียนรู้และฝึกปฏิบัติไปด้วย) โดยให้ผู้เรียนพยายาม ค้นคว้าแบบฝึกหัดจากแหล่งอื่นเพิ่มเติม

4. การทวนสอบมาตรฐานผลสัมฤทธิ์รายวิชาของนักศึกษา

มีการวัดผลคะแนนตามที่ระบุไว้ในแผนการประเมินผลการเรียนรู้ และเมื่อสิ้นสุดภาคการศึกษามีการประเมินความสอดคล้องของเนื้อหาที่สอนกับแบบทดสอบโดยนักศึกษาทุกรายวิชา

5. การดำเนินการทบทวนและการวางแผนปรับปรุงประสิทธิผลของรายวิชา

นำข้อเสนอแนะของนักศึกษามาพิจารณาและคิดแนวทางในการปรับปรุงปีการศึกษาต่อไป

ลงชื่อ: _____

(นางวชิราภักษ์ ไอร์สร้อย)

อาจารย์ผู้รับผิดชอบรายวิชา/ผู้รายงาน

วันที่ 31 เดือน กรกฎาคม พ.ศ. 2560

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 1

เนื้อหาประจำบท

1. จำนวนจริง
2. เลขยกกำลัง
3. ราก

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. สามารถแยกเซตของจำนวนชนิดต่าง ๆ ได้
2. เข้าใจและสามารถพิสูจน์สมบัติพื้นฐานของระบบจำนวนจริงได้
3. เข้าใจและสามารถสมบัติอันดับของจำนวนจริงได้
4. เข้าใจและสามารถแก้สมการเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม
5. เข้าใจและสามารถแก้สมการเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นเศษส่วน
6. เข้าใจและสามารถแก้สมการเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ
7. เข้าใจและสามารถแก้สมการเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนอตรรกยะ
8. เข้าใจและสามารถแก้สมการเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนจริงใดๆ
9. สามารถหารากที่สองด้วยวิธีการต่าง ๆ ได้
10. สามารถหารากที่สามด้วยวิธีแยกตัวประกอบได้
11. สามารถหารากที่ n ด้วยวิธีแยกตัวประกอบได้

วิธีการสอนและกิจกรรมการเรียนรู้การสอนประจำบท

1. ผู้สอนบรรยายหัวข้อต่อไปนี้อย่างพร้อมเปิดโอกาสให้ซักถาม
 - 1.1. จำนวนจริง
 - 1.2. เลขยกกำลัง
 - 1.3. ราก
2. ให้นักศึกษาทำกิจกรรมต่อไปนี้
 - 2.1. ศึกษาข้อมูล เกี่ยวกับเรื่องจำนวนจริงเพิ่มเติม
 - 2.2. ทำแบบฝึกหัดที่กำหนดให้

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนและตำราต่าง ๆ
2. Slide Presentation

การวัดผลและการประเมินผล

1. สังเกตความสนใจของนักศึกษาขณะสอน ความตั้งใจ การฟัง การจดบันทึก และการซักถาม
2. แบบฝึกหัด
3. แบบทดสอบ
4. การมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอน

บทที่ 1

จำนวนจริง

จำนวนจริง เป็นจำนวนที่ถูกนำไปใช้ในทุกสาขาวิชาซีพรวมถึงในชีวิตประจำวันก็มีจำนวนจริงซ่อนอยู่ในกระบวนการแก้ปัญหาต่าง ๆ โดยนักคณิตศาสตร์ได้สร้างจำนวนจริงจากจำนวนที่ง่ายที่สุดและเป็นธรรมชาติมากที่สุด เรียกว่า จำนวนนับหรือจำนวนธรรมชาติจากนั้นจึงแก้ปัญหาของระบบจำนวนที่ยากและซับซ้อนมากกว่าเดิม จึงทำให้เกิด จำนวนเต็ม จำนวนตรรกยะ และจำนวนอตรรกยะตามลำดับ เมื่อนำจำนวนทั้งหมดมาจัดรวมกันจึงทำให้เกิดระบบจำนวนขึ้นมาใหม่และเรียกว่าระบบจำนวนจริง สำหรับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยมากจะมีเซตของจำนวนจริงเป็นเอกภพสัมพัทธ์ จึงนับได้ว่าจำนวนจริงเป็นโครงสร้างจำนวนที่มีความสำคัญ ในกลุ่มวิชาวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ จำเป็นต้องเรียนรู้และศึกษาอย่างถ่องแท้ในบทนี้จะแบ่งเนื้อหาเป็น 3 เรื่องได้แก่ จำนวนจริง เลขยกกำลังราก ดังนี้

1.1 จำนวนจริง

มนุษย์มีความคิดเกี่ยวกับจำนวนมาตั้งแต่สมัยดึกดำบรรพ์และจำนวนที่มนุษย์คิดขึ้นเป็นครั้งแรกคือจำนวนนับ ซึ่งจำนวนนับประกอบด้วย $1, 2, 3, \dots$ ใช้ N แทนเซตของจำนวนนับ ดังนั้น

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

ต่อมามนุษย์รู้จักจำนวนนับมาบวก ลบ และคูณกัน สำหรับการบวกและการคูณจะไม่มีปัญหาสำหรับจำนวนนับ แต่เมื่อมนุษย์ต้องการหาค่า x จากสมการ $x + 7 = 5$ ทำให้ไม่สามารถหาค่า x ได้จึงคิดจำนวนเต็มขึ้นมาและใช้ I แทนเซตของจำนวนเต็มจะได้

$$I = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

ดังนั้น $N \subset I$ ถึงแม้ว่าจะได้มีการคิดจำนวนเต็มขึ้นมาแล้ว แต่มนุษย์ก็ไม่สามารถหาค่า x จาก $2x = 5$ ได้จึงได้คิดจำนวนตรรกยะขึ้นมา ใช้ Q แทนเซตของจำนวนตรรกยะจะได้

$$Q = \left\{x : x = \frac{p}{q} \text{ เมื่อ } p, q \in I \text{ และ } q \neq 0\right\}$$

จำนวนตรรกยะจึงประกอบไปด้วย

จำนวนเต็ม ได้แก่ $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ ดังนั้น $I \subset Q$

จำนวนตรรกยะที่ไม่เป็นจำนวนเต็ม เช่น $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 2\frac{7}{5}$

จำนวนที่เขียนอยู่ในรูปทศนิยมซ้ำ เช่น

$$1.75 = 1 + 0.75 = 1 + \frac{75}{100} = \frac{100}{100} + \frac{75}{100} = \frac{175}{100}$$

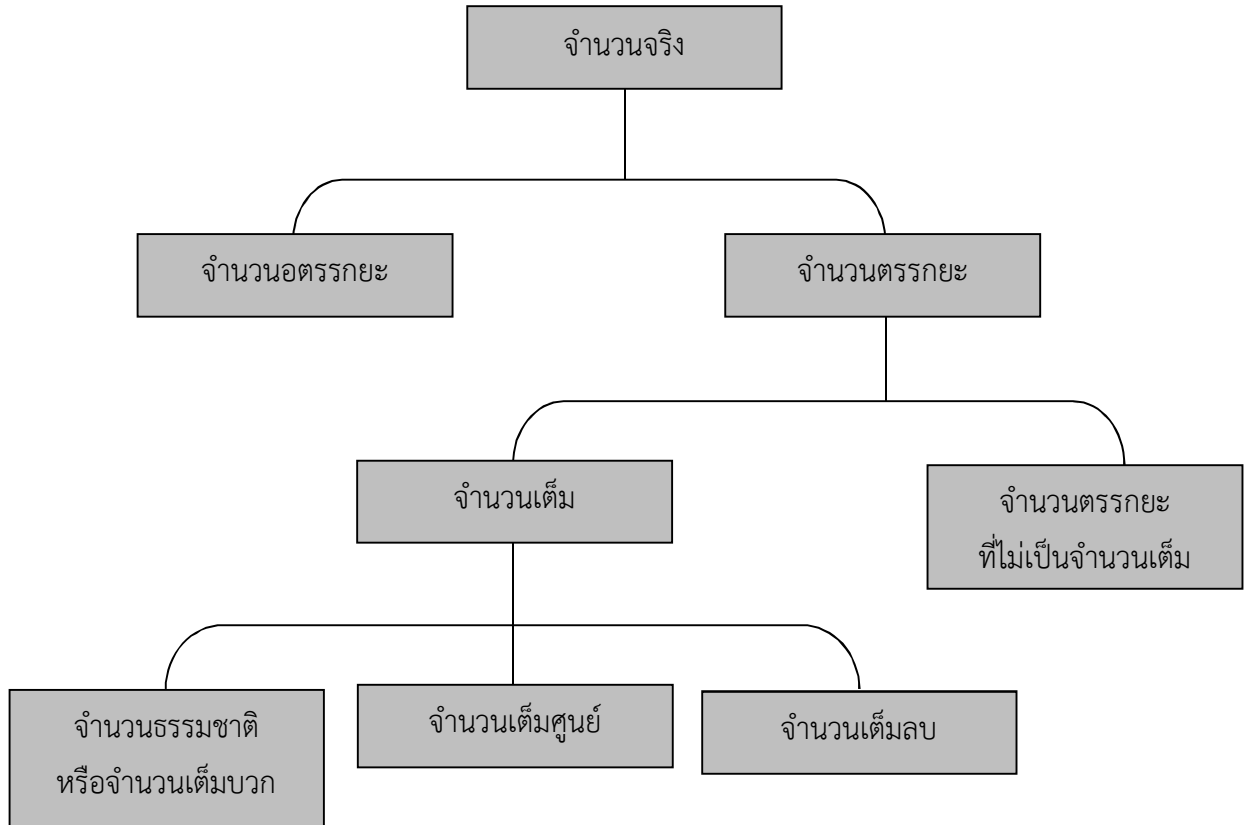
$$1.3777... = 0.3\dot{7} = \frac{37-3}{90} = \frac{34}{90} = \frac{17}{45}$$

นอกจากจำนวนดังกล่าวข้างต้นแล้วมนุษย์ได้คิดจำนวนอีกชนิดหนึ่ง เพื่อจะได้สามารถหาคำตอบของ x จากสมการ $x^2 = 3$ คือจำนวนอตรรกยะ ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างจำนวนอตรรกยะ $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{5}, 0.1261523..., 1.4144414444...$ เป็นต้น ใช้ Q' แทนเซตของจำนวนอตรรกยะ เมื่อนำเซตของจำนวนตรรกยะ และเซตของจำนวนอตรรกยะมายูเนียนกันจะได้เวทของจำนวนจริงนั่นคือ $Q \cup Q' = R$ (คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง, 2542 : 15-16)

หมายเหตุ 1.1

1. จำนวนนับบางครั้งเรียกว่าจำนวนเต็มบวกใช้ I^+ แทนเซตของจำนวนเต็มบวก ดังนั้น $I^+ = N = \{1, 2, 3, \dots\}$
2. เรียก $\dots, -3, -2, -1$ ว่าจำนวนเต็มลบ ใช้ I^- แทนเซตของจำนวนเต็มลบ ดังนั้น $I^- = \{\dots, -3, -2, -1\}$ และ $I^- \cup \{0\} \cup I^+ = I$

แผนผังแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนชนิดต่าง ๆ



ภาพประกอบ 1.1 ภาพแสดงโครงสร้างของจำนวนจริง

ที่มา : ปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร. 2547 : 177

จากแผนภาพแสดงโครงสร้างของจำนวนจริงนั้นเราสามารถนำจำนวนมาเขียนให้อยู่ใน
รูปแบบของเซตได้ดังต่อไปนี้ (จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง, 2551 : 131)

1.1.1 เซตของจำนวนชนิดต่าง ๆ

1. เซตของจำนวนนับ (N) โดยที่ $N = \{1, 2, 3, \dots\}$
2. เซตของจำนวนเต็มบวก (I^+) โดยที่ $I^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$
3. เซตของจำนวนเต็มลบ (I^-) โดยที่ $I^- = \{-1, -2, -3, \dots\}$
4. เซตของจำนวนเต็มศูนย์ (I^0) โดยที่ $I^0 = \{0\}$
5. เซตของจำนวนเต็ม (I) โดยที่ $I = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
6. เซตของจำนวนตรรกยะ (Q) โดยที่ $Q = \left\{ x \mid x = \frac{a}{b} \text{ เมื่อ } a, b \in I \text{ และ } b \neq 0 \right\}$
7. เซตของจำนวนอตรรกยะ (Q') โดยที่ $Q' =$ เซตของเลขจำนวนที่ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ
8. เซตของจำนวนจริง (R) โดยที่ $R = Q \cup Q'$

1.1.2 สมบัติพื้นฐานของระบบจำนวนจริง

วิธีการศึกษาระบบจำนวนจริงมีหลายวิธี วิธีที่นิยมกันมากวิธีหนึ่งคือวิธีให้จำนวนเต็มบวกเป็นคำ
นิยาม และกำหนดสัจพจน์ของจำนวนเต็มบวก จากนั้นสร้างระบบจำนวนตรรกยะ แล้วสร้างจำนวนอ
ตรรกยะจนได้ระบบจำนวนจริง และในที่นี้จะศึกษาระบบจำนวนจริงโดยให้จำนวนจริงเป็นนิยาม
ระบบจำนวนจริงประกอบด้วยเซตของจำนวนจริง กับการดำเนินการบวก และการคูณซึ่งสอดคล้องกับ
สัจพจน์ ที่จะกล่าวถึง และสมบัติทุกประการของระบบจำนวนจริงจะเป็นผลที่ได้รับจากสัจพจน์เหล่านี้
(สุเทพ จันท์สมศักดิ์, 2533 : 1-5)

1. สมบัติปิดของการบวก

ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงแล้ว $x + y$ เป็นจำนวนจริงด้วย

2. สมบัติการเปลี่ยนหมู่ของการบวก

ถ้า x, y และ z เป็นจำนวนจริงแล้ว $(x + y) + z = x + (y + z)$

3. สมบัติการมีเอกลักษณ์การบวก

มีจำนวนจริง 0 ซึ่ง $x + 0 = 0 + x = x$ สำหรับจำนวนจริง x ทุกตัว

4. สมบัติการมีผกผันการบวก

สำหรับจำนวนจริง x แต่ละจำนวน จะมีจำนวนจริง $-x$ ซึ่ง

$$x + (-x) = -x + x = 0$$

5. สมบัติการสลับที่ของการบวก

ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงแล้ว $x + y = y + x$

6. สมบัติปิดของการคูณ

ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงแล้ว xy เป็นจำนวนจริงด้วย

7. สมบัติการเปลี่ยนหมู่ของการคูณ

ถ้า x, y และ z เป็นจำนวนจริงแล้ว $(xy)z = x(yz)$

8. สมบัติการมีเอกลักษณ์การคูณ

มีจำนวนจริง 1 ซึ่ง $1 \neq 0$ และ $1(x) = x = (x)1$ สำหรับจำนวนจริง x ทุกตัว

9. สมบัติการมีผกผันการคูณ

สำหรับจำนวนจริง x แต่ละจำนวนที่ไม่เท่ากับ 0 จะมีจำนวนจริง x^{-1}

ซึ่ง $xx^{-1} = 1 = x^{-1}x$ (นิยมเขียนแทน x^{-1} ด้วย $\frac{1}{x}$)

10. สมบัติการสลับที่ของการคูณ

ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงแล้ว $xy = yx$

11. สมบัติการแจกแจงทางซ้าย

ถ้า x, y และ z เป็นจำนวนจริงแล้ว $x(y + z) = xy + xz$

ในระบบจำนวนจริงนอกจากสัจพจน์ต่าง ๆ แล้วยังใช้สมบัติเกี่ยวกับการใช้เครื่องหมายเท่ากับ (=) และการเท่ากันในระบบจำนวนจริงมีสมบัติดังต่อไปนี้ (เวชชีย สัจขัสา., 2536 : 103)

1. สมบัติการสะท้อน

สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ $x = x$

2. สมบัติการสมมาตร

สำหรับจำนวนจริง x, y ใด ๆ ถ้า $x = y$ แล้ว $y = x$

3. สมบัติการถ่ายทอด

สำหรับจำนวนจริง x, y, z ใด ๆ ถ้า $x = y$ และ $y = z$ แล้ว $x = z$

4. สมบัติการบวกด้วยจำนวนเท่ากัน

สำหรับจำนวนจริง x, y, z ใด ๆ ถ้า $x = y$ แล้ว $x + z = y + z$

5. สมบัติการคูณด้วยจำนวนเท่ากัน

สำหรับจำนวนจริง x, y, z ใด ๆ ถ้า $x = y$ แล้ว $xz = yz$

ทฤษฎีบท 1.1 (สมบัติการตัดออกของการบวก)

สำหรับจำนวนจริง x, y และ z ใด ๆ

1. ถ้า $x + y = x + z$ แล้ว $y = z$

2. ถ้า $y + x = z + x$ แล้ว $y = z$

พิสูจน์ (1).

$$x + y = x + z$$

$$-x + (x + y) = -x + (x + z)$$

$$(-x + x) + y = (-x + x) + z$$

$$0 + y = 0 + z$$

$$y = z$$

สมบัติบวกด้วยจำนวนเท่ากัน

สมบัติการเปลี่ยนหมู่ของการบวก

สมบัติการมีผกผันการบวก

สมบัติการมีเอกลักษณ์การบวก

(2) สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

ทฤษฎีบท 1.2

สำหรับจำนวนจริง x และ a ใด ๆ

1. ถ้า $x + a = a$ แล้ว $x = 0$

2. ถ้า $a + x = a$ แล้ว $x = 0$

พิสูจน์ (1).

เนื่องจาก $x + a = a$ กำหนดให้

และ $0 + a = a$ สมบัติการมีเอกลักษณ์การบวก

ดังนั้น $x + a = 0 + a$ สมบัติการถ่ายทอด

เพราะฉะนั้น $x = 0$ สมบัติการตัดออกของการบวก

(2) สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

ทฤษฎีบท 1.3

สำหรับจำนวนจริง x และ a ใด ๆ

1. ถ้า $x + a = 0$ แล้ว $x = -a$
2. ถ้า $a + x = 0$ แล้ว $x = -a$

พิสูจน์ (1).

เนื่องจาก $x + a = 0$ กำหนดให้
 และ $-a + a = 0$ สมบัติของอินเวอร์สการบวก
 ดังนั้น $x + a = -a + a$ สมบัติการถ่ายทอด
 เพราะฉะนั้น $x = -a$ สมบัติการตัดออกของการบวก

(2) สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

ทฤษฎีบท 1.4

สำหรับจำนวนจริง a แต่ละตัว $-(-a) = a$

พิสูจน์

เนื่องจาก $-(-a)$ เป็นอินเวอร์สการบวกของ $-a$ ดังนั้น $-(-a) + (-a) = 0$
 และเนื่องจาก $-a$ เป็นอินเวอร์สการบวกของ a ดังนั้น $a + (-a) = 0$
 เพราะฉะนั้น $-(-a) + (-a) = a + (-a)$ สมบัติถ่ายทอด
 ดังนั้น $-(-a) = a$ สมบัติตัดออกของการบวก

ทฤษฎีบท 1.5

สำหรับจำนวนจริง a ทุกตัว $a0 = 0$ และ $0a = 0$

พิสูจน์

เนื่องจาก $0a = a0$ จึงพิสูจน์เฉพาะกรณี $a0 = 0$

$$0 + 0 = 0 \quad \text{สมบัติของเอกลักษณ์การบวก}$$

$$a(0 + 0) = a0 \quad \text{สมบัติการคูณด้วยจำนวนเท่ากัน}$$

$$a0 + a0 = a0 \quad \text{สมบัติการแจกแจงทางซ้าย}$$

$$a0 + a0 = a0 + 0 \quad \text{สมบัติของเอกลักษณ์การบวก}$$

$$a0 = 0 \quad \text{สมบัติการตัดออกของการบวก}$$

ทฤษฎีบท 1.6 (สมบัติการตัดออกของการคูณ)

สำหรับจำนวนจริง a, b และ c ใด ๆ

1. ถ้า $ab = ac$ แล้ว $b = c$

2. ถ้า $ba = ca$ แล้ว $b = c$

พิสูจน์ (1).

เนื่องจาก $ab = ac$

กำหนดให้

$$a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac)$$

จาก $a \neq 0$ และสมบัติการคูณด้วยจำนวนเท่ากัน

$$(a^{-1}a)b = (a^{-1}a)c$$

สมบัติเปลี่ยนกลุ่มของการคูณ

$$(1)b = (1)c$$

สมบัติของอินเวอร์สการคูณ

$$b = c$$

สมบัติเอกลักษณ์ของการคูณ

(2) สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

ทฤษฎีบท 1.7

สำหรับจำนวนจริง x และ a ใด ๆ ซึ่ง $a \neq 0$

1. ถ้า $xa = a$ แล้ว $x = 1$

2. ถ้า $ax = a$ แล้ว $x = 1$

พิสูจน์ (1).

เนื่องจาก $xa = a$

กำหนดให้

$$1a = a$$

สมบัติเอกลักษณ์ของการคูณ

$$\begin{array}{ll}
 xa = 1a & \text{สมบัติการถ่ายทอด} \\
 x = 1 & \text{สมบัติการตัดออกสำหรับการคูณ}
 \end{array}$$

(2) สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

ทฤษฎีบท 1.8

สำหรับจำนวนจริง x และ a ใด ๆ

1. ถ้า $xa = 1$ แล้ว $x = a^{-1}$
2. ถ้า $ax = 1$ แล้ว $x = a^{-1}$

พิสูจน์ (1).

เนื่องจาก $xa = 1$ กำหนดให้และ $a \neq 0$ เพราะถ้า $a = 0$ จะได้ $xa = x0 = 0$
 เพราะฉะนั้นมี a^{-1} โดยที่ $a^{-1}a = 1$

ดังนั้น $xa = a^{-1}a$ สมบัติการถ่ายทอด

เพราะฉะนั้น $x = a^{-1}$ สมบัติการตัดออกของการคูณ

(2) สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

ทฤษฎีบท 1.9

สำหรับจำนวนจริง a ทุกตัวซึ่ง $a \neq 0$ จะได้ว่า $(a^{-1})^{-1} = a$

พิสูจน์

เนื่องจาก $(a^{-1})^{-1}$ เป็นอินเวอร์สการคูณของของ a^{-1} ดังนั้น $(a^{-1})^{-1} \cdot a^{-1} = 1$

และเนื่องจาก a^{-1} เป็นอินเวอร์สการคูณของของ a ดังนั้น $a \cdot a^{-1} = 1$

เพราะฉะนั้น $(a^{-1})^{-1} \cdot a^{-1} = a \cdot a^{-1}$ สมบัติถ่ายทอด

ดังนั้น $(a^{-1})^{-1} = a$ สมบัติตัดออกของการคูณ

ทฤษฎีบท 1.10 (สมบัติการแจกแจงทางขวา)

สำหรับจำนวนจริง a, b และ c ทุกตัว จะได้ว่า $(b + c)a = ba + ca$

ทฤษฎีบท 1.11

สำหรับจำนวนจริง a และ b ทุกตัว จะได้ว่า

$$1. a(-b) = -ab$$

$$2. -a(b) = -ab$$

$$3. (-a)(-b) = ab$$

ทฤษฎีบท 1.12

สำหรับจำนวนจริง a และ b ใด ๆ ถ้า $ab = 0$ แล้ว $a = 0$ หรือ $b = 0$

พิสูจน์

กรณีที่ 1 ถ้า $a = 0$ จะได้ตามที่ต้องการ

กรณีที่ 2 ถ้า $a \neq 0$ จะต้องมีย a^{-1}

$$ab = 0$$

$$a^{-1}(ab) = a^{-1}0 \quad \text{สมบัติการคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน}$$

$$(a^{-1}a)b = a^{-1}0 \quad \text{สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของการคูณ}$$

$$1b = a^{-1}0 \quad \text{สมบัติของอินเวอร์สการคูณ}$$

$$b = a^{-1}0 \quad \text{สมบัติของเอกลักษณ์การคูณ}$$

$$b = 0 \quad \text{จากทฤษฎีบท 1.5}$$

ทฤษฎีบทนี้ใช้ในการแก้สมการเช่น

ตัวอย่าง 1.1 จงหาเซตคำตอบของสมการ $x^2 - 3x - 10 = 0$

วิธีทำ จาก $x^2 - 3x - 10 = 0$

$$\text{จะได้ } (x - 5)(x + 2) = 0$$

$$\text{นั่นคือ } x - 5 = 0 \text{ หรือ } x + 2 = 0$$

$$x = 5 \text{ หรือ } x = -2$$

เนื่องจากเมื่อนำ -2 และ 5 ไปตรวจสอบในสมการจะได้ว่าทั้งสองจำนวนเป็นรากของสมการ ดังนั้นเซตคำตอบของสมการ คือ $\{-2, 5\}$

ทฤษฎีบท 1.13

สำหรับจำนวนจริง a, b, c และ d ใด ๆ ซึ่ง $b \neq 0, d \neq 0$

จะได้ว่า $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ก็ต่อเมื่อ $ad = bc$

พิสูจน์ 1 ($\Rightarrow$)

$$\begin{aligned}
 \text{ให้} \quad & \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \\
 & ab^{-1} = cd^{-1} \\
 & (ab^{-1})d = (cd^{-1})d \\
 & a(b^{-1}d) = c(d^{-1}d) \\
 & a(b^{-1}d) = c(1) \\
 & a(db^{-1}) = c \\
 & (ad)b^{-1} = c \\
 & ((ad)b^{-1})b = cb \\
 & (ad)(b^{-1}b) = bc \\
 & (ad)(1) = bc \\
 & ad = bc
 \end{aligned}$$

2 ($\Leftarrow$)

$$\begin{aligned}
 \text{ให้} \quad & ad = bc \\
 & ad = cb \\
 & (ad)b^{-1} = (cb)b^{-1} \\
 & a(db^{-1}) = c(bb^{-1}) \\
 & a(b^{-1}d) = c(1) \\
 & (ab^{-1})d = c \\
 & ((ab^{-1})d)d^{-1} = cd^{-1} \\
 & (ab^{-1})(dd^{-1}) = cd^{-1} \\
 & (ab^{-1})(1) = cd^{-1}
 \end{aligned}$$

$$(ab^{-1}) = cd^{-1}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

ทฤษฎีบท 1.14

สำหรับจำนวนจริง a, b, c และ d ใด ๆ จะได้ว่า $a - b = c - d$
ก็ต่อเมื่อ $a + d = c + b$

พิสูจน์ 1 ($\Rightarrow$)

$$\begin{aligned} \text{ให้} \quad & a - b = c - d \\ & (a - b) + d = (c - d) + d \\ & (a - b) + d = c + (-d + d) \\ & (a - b) + d = c + 0 \\ & (a - b) + d = c \\ & ((a - b) + d) + b = c + b \\ & b + ((a - b) + d) = c + b \\ & (b + (a - b)) + d = c + b \\ & ((b + a) - b) + d = c + b \\ & ((a + b) - b) + d = c + b \\ & (a + (b - b)) + d = c + b \\ & (a + 0) + d = c + b \\ & a + d = c + b \end{aligned}$$

2 ($\Leftarrow$) สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

ทฤษฎีบท 1.15

สำหรับจำนวนจริง b และ d ใด ๆ ซึ่งต่างก็ไม่เท่ากับศูนย์
จะได้ว่า $(bd)^{-1} = b^{-1}d^{-1}$

ทฤษฎีบท 1.16

สำหรับจำนวนจริง a, b, c, d ใด ๆ ซึ่ง $b \neq 0$ และ $d \neq 0$

$$\text{จะได้ว่า } \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}$$

พิสูจน์

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) &= (ab^{-1})(cd^{-1}) \\ &= ((ab^{-1})c)d^{-1} \\ &= (a(b^{-1}c))d^{-1} \\ &= (a(cb^{-1}))d^{-1} \\ &= ((ac)b^{-1})d^{-1} \\ &= (ac)(b^{-1}d^{-1}) \\ &= (ac)(bd)^{-1} \\ &= \frac{ac}{bd} \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 1.17

สำหรับจำนวนจริง b, c, d ใด ๆ ซึ่ง $b \neq 0$ และ $d \neq 0$

$$\text{จะได้ว่า } \frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$$

ทฤษฎีบท 1.18

สำหรับจำนวนจริง c และ d ทุกตัวซึ่งต่างก็ไม่เท่ากับศูนย์

$$\text{จะได้ว่า } \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{d}{c}$$

พิสูจน์

$$\left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = (cd^{-1})^{-1}$$

$$\begin{aligned}
 &= c^{-1} \left(d^{-1} \right)^{-1} \\
 &= c^{-1} d \\
 &= d c^{-1} \\
 &= \frac{d}{c}
 \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 1.19

สำหรับจำนวนจริง a, b, c, d ใด ๆ ซึ่ง $b \neq 0, c \neq 0$ และ $d \neq 0$

จะได้ว่า
$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

พิสูจน์

$$\begin{aligned}
 \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} &= \left(\frac{a}{b} \right) \left(\frac{c}{d} \right)^{-1} \\
 &= \left(\frac{a}{b} \right) \left(\frac{d}{c} \right) = \frac{ad}{bc}
 \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 1.20

สำหรับจำนวนจริง a, b, c, d ใด ๆ ซึ่ง $b \neq 0$ และ $d \neq 0$

จะได้ว่า
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

พิสูจน์

$$\begin{aligned}
 \frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} \\
 &= ad(bd)^{-1} + bc(bd)^{-1} \\
 &= (ad + bc)(bd)^{-1} \\
 &= \frac{ad + bc}{bd}
 \end{aligned}$$

1.1.3 สมบัติอันดับของจำนวนจริง

สมบัติที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้เกี่ยวข้องกับเซตของจำนวนจริงบวกที่เป็นเซตย่อยของเซตของจำนวนจริง ซึ่งกล่าวว่า

มีเซตย่อย P ของ R ซึ่งสอดคล้องกับคุณสมบัติต่อไปนี้

1. ถ้า $a \in P$ และ $b \in P$ แล้ว $a + b \in P$

2. สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ โดยที่ $a \neq 0, a \in P$ หรือ $-a \in P$

อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

3. $0 \notin P$

เราเรียกสมบัติทั้ง 3 ข้อนี้ว่า **สมบัติอันดับของจำนวนจริง** (ปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร, 2547 : 189-192)

บทนิยาม 1.1

เรียกเซต P ซึ่งมีสมบัติ 3 ข้อข้างต้น ว่าเซตของจำนวนจริงบวกถ้า $a \in P$ เรียก a ว่าจริงบวก และถ้า $-a \in P$ เรียก a ว่าจำนวนจริงลบ

บางครั้งเราเขียน P ด้วย R^+ และเขียนแทนเซตของจำนวนจริงลบด้วย R^- ดังนั้น

$$R = R^- \cup \{0\} \cup R^+$$

จากสมบัติทั้งสามข้อข้างต้นสามารถกำหนดความสัมพันธ์ มากกว่า มากกว่าหรือเท่ากับ น้อยกว่า น้อยกว่าหรือเท่ากับ ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ตามลำดับต่อไปนี้ $>, \geq, <, \leq$

บทนิยาม 1.2

สำหรับจำนวนจริงใด ๆ a และ b

1. $a > b$ หมายถึง $a - b \in R^+$

2. $a < b$ หมายถึง $b > a$

3. $a \geq b$ หมายถึง $a - b \in R^+$ หรือ $a = b$

4. $a \leq b$ หมายถึง $b \geq a$

จากสมบัติอันดับของจำนวนจริงข้อ 2 แสดงว่า สำหรับจำนวนจริงใด ๆ a และ b $a - b \in R^+$ หรือ $b - a \in R^+$ หรือ 0 อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น ดังนั้นจำนวนจริงใด ๆ a และ b มีความสัมพันธ์กันอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น คือ

$$a > b$$

หรือ $a < b$

หรือ $a = b$

จากสมบัติอันดับของจำนวนจริงมีทฤษฎีเบื้องต้นที่ควรทราบดังนี้

ทฤษฎีบท 1.21 (สมบัติถ่ายทอด)

สำหรับจำนวนจริงใด ๆ a, b และ c ถ้า $a > b$ และ $b > c$ แล้ว $a > c$

พิสูจน์

ให้ $a > b$ และ $b > c$

ดังนั้น $a - b \in R^+$ และ $b - c \in R^+$

เพราะฉะนั้น $(a - b) + (b - c) \in R^+$ สมบัติอันดับของจำนวนจริงข้อ 1

แต่ $(a - b) + (b - c) = a + (-b + (b - c))$

$$= a + ((-b + b) - c)$$

$$= a + (0 - c)$$

$$= a - c$$

ดังนั้น $a - c \in R^+$

นั่นคือ $a > c$

ทฤษฎีบท 1.22

สำหรับจำนวนจริงใด ๆ a, b และ c ถ้า $a > b$ แล้ว $a + c > b + c$

พิสูจน์

ให้ $a > b$

ดังนั้น $a - b \in R^+$

แต่ $(a - b) = (a - b) + 0$

$$\begin{aligned}
&= (a - b) + (c - c) \\
&= ((a - b) + c) - c \\
&= (a + (-b + c)) - c \\
&= (a + (c - b)) - c \\
&= (a + c) + (-b - c) \\
&= (a + c) - (b + c)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $(a + c) - (b + c) \in R^+$

นั่นคือ $a + c > b + c$

ทฤษฎีบท 1.23

สำหรับจำนวนจริงใด ๆ a และ b

1. ถ้า $a > b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac > bc$
2. ถ้า $a > b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac < bc$

พิสูจน์ (1)

ให้ $a > b$ และ $c > 0$

ดังนั้น $a - b \in R^+$ และ $c - 0 \in R^+$

นั่นคือ $(a - b)(c - 0) \in R^+$

สมบัติอันดับของจำนวนจริงข้อ 1

แต่ $(a - b)(c - 0) = (a - b)c$

$$= ac - bc$$

ดังนั้น $ac - bc \in R^+$

นั่นคือ $ac > bc$

(2)

ให้ $a > b$ และ $c < 0$

ดังนั้น $a - b \in R^+$ และ $0 - c \in R^+$

นั่นคือ $(a - b)(0 - c) \in R^+$

สมบัติอันดับของจำนวนจริงข้อ 1

แต่ $(a - b)(0 - c) = (a - b)(-c)$

$$= -ac + bc$$

$$= bc - ac$$

ดังนั้น $bc - ac \in R^+$

นั่นคือ $bc > ac$

ดังนั้น $ac < bc$

ทฤษฎีบท 1.24

ถ้า a เป็นจำนวนจริงใด ๆ โดยที่ $a \neq 0$ แล้ว $a^2 > 0$

พิสูจน์

สำหรับ $a \neq 0$ แสดงว่า $a \in R^+$ หรือ $a \in R^-$

ดังนั้น ถ้า $a \in R^+$ จะได้ $aa \in R^+$

นั่นคือ $a^2 \in R^+$

ถ้า $-a \in R^+$ จะได้ $(-a)(-a) \in R^+$

แต่ $(-a)(-a) = aa = a^2$

ดังนั้น $a^2 \in R^+$

ทฤษฎีบท 1.25

ถ้า a และ b สำหรับจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $a > b$ แล้ว $-a < -b$

ทฤษฎีบท 1.26

กำหนดให้ a และ b สำหรับจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $ab > 0$

จะได้ว่ากรณีใดกรณีหนึ่งต่อไปนี้เป็นจริงเพียงกรณีเดียว

ทฤษฎีบท 1.27

ถ้า a, b, c และ d เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $a < b$ และ $c < d$

แล้ว $a + c < b + d$

พิสูจน์

ให้ $a < b$ และ $c < d$

นั่นคือ $b > a$ และ $d > c$

ดังนั้น $b - a \in R^+$ และ $d - c \in R^+$

นั่นคือ $(b - a)(d - c) \in R^+$

สมบัติอันดับของจำนวนจริงข้อ 1

แต่ $(b - a)(d - c) = (b + d) - (a + c)$

ดังนั้น $(b + d) - (a + c) \in R^+$

นั่นคือ $b + d > a + c$

ดังนั้น $a + c < b + d$

1.2 เลขยกกำลัง

การยกกำลังคือการดำเนินการทางคณิตศาสตร์อย่างหนึ่ง เขียนอยู่ในรูป a^n ซึ่งประกอบด้วยสองจำนวนคือฐาน (a) และเลขชี้กำลัง (n) การยกกำลังมีความหมายเหมือนการคูณซ้ำ ๆ กัน นั่นเอง และสำหรับเนื้อหาในเรื่องนี้นั้นคือการทราบถึงเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่งจะต้องค่อย ๆ ทำความเข้าใจโดยเริ่มศึกษาตามลำดับดังนี้

1. เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม
2. เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นเศษส่วน
3. เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ
4. เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนอตรรกยะ
5. เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนจริงใดๆ

ก่อนที่จะศึกษาเรื่องต่าง ๆ ที่กล่าวมาข้างต้นนั้นก่อนอื่นต้องมาทำความเข้าใจเกี่ยวกับบทนิยามต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับเลขยกกำลังดังต่อไปนี้ (สุชิน ทำมาหากิน, 2540 : 1)

บทนิยาม 1.3

ถ้า a เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก
 a^n อ่านว่า a ยกกำลัง n หมายถึง a คูณกัน n ตัว เรียก a ว่าฐาน
 เรียก n ว่าเลขชี้กำลัง

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ ตัว}}$$

ตัวอย่าง 1.2

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2$$

$$5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5$$

$$(-3)^2 = (-3) \times (-3)$$

$$(-4)^3 = (-4) \times (-4) \times (-4)$$

$$(\sqrt{2})^4 = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}$$

บทนิยาม 1.4

$$a^0 = 1 \text{ เมื่อ } a \text{ เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ } a \neq 0$$

บทนิยาม 1.5

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ เมื่อ } a \text{ เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ } a \neq 0 \text{ และ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก}$$

ข้อสังเกต 1.1

1. จากทั้ง 3 บทนิยามที่กล่าวมาข้างต้นนั้นได้แสดงให้เห็นถึงเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก จำนวนเต็มลบ และ ศูนย์
2. 0^0 ไม่ถูกกำหนดให้เกิดขึ้น(ไม่นิยาม)
3. ถ้า a เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ $a \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จะสามารถหา a^n ได้เสมอ

ทฤษฎีบท 1.28

ให้ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ $a \neq 0$ และ m, n เป็นจำนวนเต็มบวก
แล้วจะได้ว่า $a^m \times a^n = a^{m+n}$

พิสูจน์

$$\begin{aligned} a^m \times a^n &= \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_m \text{ ตัว} \times \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_n \text{ ตัว} \\ &= \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{m+n} \text{ ตัว} \\ &= a^{m+n} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.3

$$2^3 \times 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$$

$$(-3)^2 \times (-3)^4 = (-3)^{2+4} = (-3)^6$$

ทฤษฎีบท 1.29

ให้ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ m, n เป็นจำนวนเต็มบวก
 แล้วจะได้ว่า $(a^m)^n = a^{mn}$

$$\begin{aligned}
 \text{พิสูจน์} \quad (a^m)^n &= \underbrace{a^m \times a^m \times a^m \times \cdots \times a^m}_{n \text{ ตัว}} \\
 &= \underbrace{a^{m+m+m+\cdots+m}}_{n \text{ ตัว}} \\
 &= a^{mn}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.4

$$\begin{aligned}
 (2^3)^5 &= 2^{3 \times 5} = 2^{15} \\
 (-3^2)^4 &= (-3)^{2 \times 4} = (-3)^8
 \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 1.30

ให้ a, b เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก
 แล้วจะได้ว่า $(ab)^n = a^n \times b^n$

$$\begin{aligned}
 \text{พิสูจน์} \quad (ab)^n &= \underbrace{ab \times ab \times ab \times \cdots \times ab}_{n \text{ ตัว}} \\
 &= \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ ตัว}} \times \underbrace{b \times b \times b \times \cdots \times b}_{n \text{ ตัว}} \\
 &= a^n \times b^n
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.5

$$\begin{aligned}
 (2 \times 3)^5 &= 2^5 \times 3^5 \\
 (-3 \times 6)^4 &= (-3)^4 \times 6^4
 \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 1.31

เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $b \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

$$\text{แล้วจะได้ว่า } \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

พิสูจน์

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b}\right)^n &= (ab^{-1})^n \\ &= a^n b^{-n} \\ &= \frac{a^n}{b^n} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.6

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}\right)^5 &= \frac{2^5}{3^5} \\ \left(\frac{-3}{6}\right)^4 &= \frac{(-3)^4}{6^4} \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 1.32

ให้ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ $a \neq 0$ และ m, n เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว

$$\text{แล้วจะได้ว่า } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

พิสูจน์

$$\begin{aligned} \frac{a^m}{a^n} &= a^m a^{-n} \\ &= a^{m+(-n)} \\ &= a^{m-n} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.7

$$\frac{2^4}{2^5} = 2^{4-5} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{(-3)^6}{(-3)^2} = (-3)^{6-2} = (-3)^4$$

จากบทนิยามและทฤษฎีที่ผ่านมาสามารถสรุปได้ดังต่อไปนี้

ถ้า a, b เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ m, n เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว (จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง, 2551 : 193)

1. $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ ตัว}}$
2. $a^m \times a^n = a^{m+n}$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$
4. $(a \times b)^n = a^n \times b^n$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$. เมื่อ $b \neq 0$
6. $a^0 = 1$ เมื่อ $a \neq 0$
7. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ เมื่อ $a \neq 0$
8. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ เมื่อ $a \neq 0$

ตัวอย่าง 1.8 จงทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย เมื่อกำหนดให้ $x > 0, y > 0$ และ $z > 0$ $\left(\frac{x^2 y^3}{x^{-3} z^{-5}}\right)^2$

วิธีทำ $\left(\frac{x^2 y^3}{x^{-3} z^{-5}}\right)^2 = \left(x^{2-(-3)} y^3 z^5\right)^2$

$$= \left(x^5 y^3 z^5\right)^2$$

$$= x^{10} y^6 z^{10}$$

ดังนั้น $\left(\frac{x^2 y^3}{x^{-3} z^{-5}}\right)^2 = x^{10} y^6 z^{10}$

บทนิยาม 1.6

ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง b เป็นรากที่สองของ a ก็ต่อเมื่อ $b^2 = a$

เนื่องจาก $b \neq 0$ จะได้ว่า $b^2 > 0$ และถ้า $b = 0$ จะได้ว่า $b^2 = 0$ ดังนั้น ไม่มีจำนวนจริงใดที่ยกกำลังสองแล้วได้จำนวนจริงลบ เพราะฉะนั้น ในระบบจำนวนจริงเราจะมีรากที่สองของ a เมื่อ a เป็นจำนวนจริงบวก หรือ 0 เท่านั้น ในอนาคตเมื่อเราขยายระบบจำนวนจริงเป็นระบบจำนวนเชิงซ้อนแล้ว เราจะสามารถให้บทนิยามที่ครอบคลุมถึงจำนวนจริงลบ

ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก รากที่สองของ a ได้แก่รากที่เป็นจำนวนจริงบวก และรากที่เป็นจำนวนจริงลบ ใช้สัญลักษณ์ $\sqrt{a}$ แทนรากที่สองที่เป็นจำนวนจริงบวกของ a และ $-\sqrt{a}$ แทนรากที่สองที่เป็นจำนวนจริงลบของ a

ถ้า $a = 0$ a จะมีรากที่สองเพียงรากเดียวคือ 0

ต่อไปนี้จะเขียน $\sqrt{a}$ ก็ต่อเมื่อ $a \geq 0$ เท่านั้น

คุณสมบัติของรากที่สองที่เป็นบวกเกี่ยวข้องกับค่าสัมบูรณ์ดังนี้ (สุเทพ ทองอยู่ และสุเทพ จันทร์สมศักดิ์, 2533 : 172)

ตัวอย่าง 1.9 เนื่องจาก $5^2 = 25$ และ $(-5)^2 = 25$ ดังนั้น 5 และ -5 เป็นรากที่สองของ 25

$$\sqrt{25} = 5$$

$$-\sqrt{25} = -5$$

$$\sqrt{5^2} = |5| = 5$$

$$\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$$

ทฤษฎีบท 1.33

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง ซึ่งต่างมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์
แล้วจะได้ว่า $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

ตัวอย่าง 1.10 จงหาผลลัพธ์ $7\sqrt{45} + 3\sqrt{20}$

วิธีทำ $7\sqrt{45} + 3\sqrt{20} = 7\sqrt{9 \times 5} + 3\sqrt{4 \times 5}$

$$\begin{aligned}
&= 7\sqrt{9}\sqrt{5} + 3\sqrt{4}\sqrt{5} \\
&= 7(3)\sqrt{5} + 3(2)\sqrt{5} \\
&= 21\sqrt{5} + 6\sqrt{5} \\
&= 27\sqrt{5}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $7\sqrt{45} + 3\sqrt{20} = 27\sqrt{5}$

ตัวอย่าง 1.11 จงหาผลลัพธ์ $\sqrt{50} + \sqrt{72}$

วิธีทำ $\sqrt{50} + \sqrt{72} = \sqrt{25 \times 2} + \sqrt{36 \times 2}$

$$\begin{aligned}
&= (\sqrt{25} \times \sqrt{2}) + (\sqrt{36} \times \sqrt{2}) \\
&= 5\sqrt{2} + 6\sqrt{2} \\
&= 11\sqrt{2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\sqrt{50} + \sqrt{72} = 11\sqrt{2}$

ทฤษฎีบท 1.34

ถ้า a เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $a > 0$ แล้วจะได้ว่า $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$

พิสูจน์

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{a}} &= \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} \\
&= \frac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a})^2} \\
&= \frac{\sqrt{a}}{|a|} \\
&= \frac{\sqrt{a}}{a} \quad \text{เพราะว่า } a > 0
\end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 1.35

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a \geq 0$ และ $b > 0$

แล้วจะได้ว่า
$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

ตัวอย่าง 1.12 จงหาผลลัพธ์ $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right) + \left(\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}}{5} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{10}}{5} \\ &= \frac{5\sqrt{3} + 3\sqrt{10}}{15} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{3} + 3\sqrt{10}}{15}$

ตัวอย่าง 1.13 จงพิสูจน์ว่า $\frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{x}}{a} = \frac{1}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}}$

วิธีทำ

$$\frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{x}}{a} = \left(\frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{x}}{a} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left(\sqrt{x+a}\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2}{a\left(\sqrt{x+a} + \sqrt{x}\right)} \\
&= \frac{(x+a) - x}{a\left(\sqrt{x+a} + \sqrt{x}\right)} \\
&= \frac{a}{a\left(\sqrt{x+a} + \sqrt{x}\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{x}}{a} = \frac{1}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}}$

ตัวอย่าง 1.14 จงหาผลลัพธ์ $-10\sqrt{13} \times \left(-4\sqrt{\frac{1}{13}}\right)$

วิธีทำ $-10\sqrt{13} \times \left(-4\sqrt{\frac{1}{13}}\right) = -10 \times (-4) \left(\sqrt{13}\right) \sqrt{\frac{1}{13}}$

$$\begin{aligned}
&= -10 \times (-4) \sqrt{\frac{13}{13}} \\
&= 40 \sqrt{\frac{13}{13}} \\
&= 40 \sqrt{1} \\
&= 40
\end{aligned}$$

ดังนั้น $-10\sqrt{13} \times \left(-4\sqrt{\frac{1}{13}}\right) = 40$

1.3 ราก

สำหรับเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นเศษส่วนนั้นจะแบ่งออกเป็นได้สองกรณีคือ จำนวนจริงในรูปกรณฑ์ และรากที่ n ในระบบจำนวนจริงและก่อนที่เราจะศึกษารากที่ n เราจะศึกษาจากง่ายไปหายากโดยจะเริ่มต้นจากรากที่ 2 รากที่ 3 ไปเรื่อย ๆ จนถึงรากที่ n ดังจะกล่าวในบทนิยามต่อไปนี้ (สุเทพ ทองอยู่ และสุเทพ จันทรสมศักดิ์, 2533 : 175)

1.3.1 รากที่สอง

บทนิยาม 1.7

ให้ a เป็นจำนวนจริง รากที่สองของ a คือจำนวนที่ยกกำลังสองแล้วได้ a
 สัญลักษณ์ $\sqrt{a}$ แทนรากที่สองของ a ที่เป็นบวก และ
 $-\sqrt{a}$ แทนรากที่สองของ a ที่เป็นลบ

ข้อสังเกต 1.2

$\sqrt{a}$ แทนรากที่สองของ a ที่เป็นบวก สามารถเขียน $\sqrt{a}$ แทนด้วย $a^{\frac{1}{2}}$

ตัวอย่าง 1.15

$\sqrt{2}$ แทนรากที่สองที่เป็นบวก ของ 2
 $-\sqrt{2}$ แทนรากที่สองที่เป็นลบของ 2

บทนิยาม 1.8

ให้ a เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ หรือศูนย์ รากที่สองของ a คือจำนวนที่ยกกำลังสองแล้วได้ a มีสองราก เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sqrt{a}$ และ $-\sqrt{a}$

ข้อสังเกต 1.3

จากบทนิยาม 1.8 ค่าของ a เป็นลบ รากที่สองของ a เป็นจำนวนเชิงซ้อนจำนวนเหล่านี้แทนด้วยจุดบนเส้นจำนวนไม่ได้ เหตุนี้เราจึงไม่กล่าวถึง $\sqrt{-a}$ ให้สัญลักษณ์ $|a|$ แทนค่าสัมบูรณ์ของ a ดังนั้น $\sqrt{a^2} = |a|$

ตัวอย่าง1.16 จงหา $\sqrt{36}$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ } \sqrt{36} &= \sqrt{(6)^2} \\ &= |6| \\ &= 6\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \sqrt{36} = 6$$

ตัวอย่าง1.17 จงหา $\sqrt{4489}$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ } \sqrt{4489} &= \sqrt{(67)^2} \\ &= |67| \\ &= 67\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \sqrt{4489} = 67$$

ตัวอย่าง1.18 จงหา $-\sqrt{3.9204}$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ } -\sqrt{3.9204} &= -\sqrt{(1.98)^2} \\ &= -|1.98| \\ &= -1.98\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \sqrt{4489} = -1.98$$

ตัวอย่าง1.19 จงหา $-\sqrt{(-13.69)^2}$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ } -\sqrt{(-13.69)^2} &= -\sqrt{(-13.69)^2} \\ &= -|-13.69| \\ &= -13.69\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } -\sqrt{(-13.69)^2} = -13.69$$

จากตัวอย่างที่ผ่านมานั้นการหารากที่ 2 บางตัวอย่างก็หาได้ง่ายแต่บางตัวอย่างนั้นการหารากที่สองนั้นอาจจะยากดังนั้นจึงได้แสดงวิธีการหารากที่สองแบบต่าง ๆ ดังต่อไปนี้(สุชิน ทำมาหากิน, 2540 : 33)

1. การหารากที่สองโดยการแยกตัวประกอบ

2. การหารากที่สองโดยวิธีเฉลี่ย
3. การหารากที่สองโดยวิธีตั้งหาร

1. การหารากที่สองโดยการแยกตัวประกอบ

การหารากด้วยวิธีแยกตัวประกอบ นั้นเหมาะสำหรับเลขจำนวนน้อย ๆ โดยเลขตัวประกอบตัวใดเหมือนกัน ก็แยกเอาออกมาเป็นสองชุด ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.20 จงหารากที่สองโดยวิธีการแยกตัวประกอบ $\sqrt{144}$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ } \sqrt{144} &= \sqrt{2 \cdot 72} \\
 &= \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 36} \\
 &= \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 18} \\
 &= \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9} \\
 &= \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} \\
 &= \sqrt{(2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 3)} \\
 &= \sqrt{(12) \cdot (12)} \\
 &= \sqrt{(12)^2} \\
 &= |12| \\
 &= 12
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\sqrt{144} = 12$

2. การหารากที่สองโดยวิธีเฉลี่ย

การหารากที่สองโดยวิธีเฉลี่ยนี้ค่าที่ได้จะเป็นค่าโดยประมาณเพราะจะมีความคลาดเคลื่อนซึ่งการหาโดยวิธีนี้จะเริ่มต้นจากการประมาณค่ารากที่สองว่าอยู่บนช่วงใด แล้วจำกัดช่วงให้แคบลงไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะได้ตำแหน่งทศนิยมตามที่เรา ดังจะแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.21 จงหาค่าประมาณของ $\sqrt{7}$ โดยวิธีเฉลี่ย ให้ได้ค่าถึงทศนิยม 1 ตำแหน่ง

วิธีทำ เรารู้ว่า $2^2 < (\sqrt{7})^2 < 3^2$

นั่นคือ $2 < (\sqrt{7}) < 3$ แสดงว่า $\sqrt{7}$ อยู่บนเส้นจำนวนระหว่าง 2 และ 3

หาค่าเฉลี่ยของ 2 และ 3 ได้ $\frac{2+3}{2} = 2.5$

นำ 2.5 ไปหาร 7 ได้ 2.8

$$\text{จะได้ } (2.5)^2 < (\sqrt{7})^2 < (2.8)^2$$

$$\text{นั่นคือ } 2.5 < \sqrt{7} < 2.8$$

$$\text{หาค่าเฉลี่ยของ 2.5 และ 2.8 ได้ } \frac{2.5 + 2.8}{2} = 2.65$$

นำ 2.65 ไปหาร 7 ได้ประมาณ 2.64

$$\text{จะได้ } (2.64)^2 < (\sqrt{7})^2 < (2.65)^2$$

$$\text{นั่นคือ } 2.64 < \sqrt{7} < 2.65$$

ดังนั้น ค่าโดยประมาณของ $\sqrt{7}$ ซึ่งถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 1 คือ 2.6

ตัวอย่าง 1.22 จงหาค่าประมาณของ $\sqrt{23}$ โดยวิธีเฉลี่ย ให้ได้ค่าถึงทศนิยม 1 ตำแหน่ง

วิธีทำ เรารู้ว่า $4^2 < (\sqrt{23})^2 < 5^2$

$$\text{นั่นคือ } 4 < (\sqrt{23}) < 5 \text{ แสดงว่า } \sqrt{23} \text{ อยู่บนเส้นจำนวนระหว่าง 4 และ 5}$$

$$\text{หาค่าเฉลี่ยของ 4 และ 5 ได้ } \frac{4 + 5}{2} = 4.5$$

นำ 4.5 ไปหาร 23 ได้ประมาณ 5.1

$$\text{จะได้ } (4.5)^2 < (\sqrt{23})^2 < (5.1)^2$$

$$\text{นั่นคือ } 4.5 < \sqrt{23} < 5.1$$

$$\text{หาค่าเฉลี่ยของ 4.5 และ 5.1 ได้ } \frac{4.5 + 5.1}{2} = 4.8$$

นำ 4.8 ไปหาร 23 ได้ประมาณ 4.79

$$\text{นั่นคือ } 4.79 < \sqrt{23} < 4.8$$

$$\text{หาค่าเฉลี่ยของ 4.79 และ 4.8 ได้ } \frac{4.79 + 4.8}{2} = 4.795$$

นำ 4.795 ไปหาร 23 ได้ประมาณ 4.796

$$\text{นั่นคือ } 4.795 < \sqrt{23} < 4.796$$

ดังนั้น ค่าโดยประมาณของ $\sqrt{23}$ ซึ่งถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 2 คือ 4.79

3. การหารากที่สองโดยวิธีตั้งหาร

จะเห็นว่าการหารากที่สองโดยที่ผ่านมานั้นเป็นการหาเฉพาะตัวเลขง่าย ๆ แต่สำหรับวิธีการตั้งหารสำหรับวิธีเหมาะสำหรับตัวเลขที่มีสามหลักขึ้นไป หรือตัวเลขที่เป็นทศนิยม โดยมีวิธีการดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1. แบ่งตัวเลขที่จะหารากที่สองออกเป็นคาบ คาบละ 2 ตัว โดยที่ถ้าเป็นจำนวนเต็มให้แบ่งจากตำแหน่งขวามือสุดไปทางซ้ายมือคาบละ 2 ตัว ถ้าเป็นตำแหน่งหลังจุดทศนิยมให้นับจากซ้ายมือไปทางขวามือคาบละสองตัว

ขั้นที่ 2 หาจำนวนที่ยกกำลังสองแล้วมีค่าใกล้เคียงกับจำนวนในคาบซ้ายสุด(อาจมีตัวเลข 1 หรือ 2 ตัวก็ได้) จำนวนนี้จะเป็นจำนวนที่อยู่ในหลักซ้ายสุดของรากที่สองแล้วนำจำนวนนี้ใส่ลงที่ผลลัพธ์ แล้วนำกำลังสองของจำนวนนี้ลบออกจากจำนวนในคาบแรก เสร็จแล้วนำตัวเลขในคาบต่อไปลงมาเป็นตัวตั้งต่อไป

ขั้นที่ 3 นำ 2 คูณผลลัพธ์ที่ได้จากขั้นที่ 2

ขั้นที่ 4 หาจำนวนที่มีหลักเดียวเติมหลังผลคูณที่ได้จากขั้นที่ 3 และที่ผลลัพธ์แล้วนำจำนวนนี้มาคูณกับตัวตั้งของขั้นที่ 2 แล้วลบออกจากตัวตั้งของขั้นที่ 2 ถ้าผลคูณน้อยกว่าจะเหลือเศษให้นำตัวเลขในคาบถัดไปลงมาเป็นตัวตั้งต่อไป แล้วเริ่มทำตามขั้นที่ 3 ต่อไป

ตัวอย่าง 1.23 จงหาค่าประมาณของ $\sqrt{625}$ โดยวิธีตั้งหาร

วิธีทำ

$$\begin{array}{r} 2 \ 5 \\ 2 \overline{) 6, 25} \\ 4 \qquad \qquad \rightarrow (2 \times 2) \\ 2 \ 25 \qquad \rightarrow 4 \underline{5} \times 5 \end{array}$$

ดังนั้น $\sqrt{625} = 25$

ตัวอย่าง 1.24 จงหาค่าประมาณของ $\sqrt{17956}$ โดยวิธีตั้งหาร

วิธีทำ

$$\begin{array}{r} 1 \ 3 \ 4 \\ 2 \overline{) 1, 79, 56} \\ 1 \qquad \qquad \qquad \\ 79 \qquad \qquad \qquad \\ 69 \qquad \qquad \rightarrow (2 \underline{3}) \times 3 \\ 10 \ 56 \qquad \qquad \qquad \\ 10 \ 56 \qquad \rightarrow (2 \underline{6} \underline{4}) \times 4 \end{array}$$

ดังนั้น $\sqrt{17956} = 134$

ตัวอย่าง 1.25 จงหาค่าประมาณของ $\sqrt{821}$ โดยวิธีตั้งหาร
วิธีทำ

$$\begin{array}{r}
 28.65 \\
 2 \overline{)8,21} \\
 \underline{4} \\
 421 \\
 \underline{384} \rightarrow (48) \times 8 \\
 3700 \\
 \underline{3396} \rightarrow (566) \times 6 \\
 30400 \\
 \underline{28625} \rightarrow (5725) \times 5 \\
 \vdots
 \end{array}$$

ดังนั้น $\sqrt{821}$ มีค่าประมาณ 28.65

ตัวอย่าง 1.26 จงหาค่าประมาณของ $\sqrt{23}$ โดยวิธีตั้งหาร
วิธีทำ

$$\begin{array}{r}
 4.7 \\
 2 \overline{)23} \\
 \underline{16} \\
 700 \\
 \underline{609} \rightarrow 87 \times 7 \\
 9100 \\
 \underline{8541} \rightarrow 949 \times 9 \\
 \vdots
 \end{array}$$

ดังนั้น $\sqrt{23}$ มีค่าประมาณ 4.7

1.3.2 รากที่สาม

บทนิยาม 1.9

ให้ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ รากที่สามของ a คือจำนวนที่ยกกำลังสาม
แล้วได้ a แทนด้วยสัญลักษณ์ $\sqrt[3]{a}$

สำหรับการหารากที่สามในเอกสารเล่มนี้จะแสดงการหาเฉพาะวิธีการหาโดยแยกตัวประกอบเท่านั้นโดยจะแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.27 จงหา $\sqrt[3]{27}$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad \text{เนื่องจาก } 27 &= 3 \times 9 \\ &= 3 \times 3 \times 3 \\ &= 3^3\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \sqrt[3]{27} = 3$$

ตัวอย่าง 1.28 จงหา $\sqrt[3]{3375}$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad \text{เนื่องจาก } 3375 &= (5 \times 675) \\ &= 5 \times 5 \times 135 \\ &= 5 \times 5 \times 5 \times 27 \\ &= 5 \times 5 \times 5 \times 3 \times 9 \\ &= 5 \times 5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 3 \\ &= (5 \times 3) \times (5 \times 3) \times (5 \times 3) \\ &= 15 \times 15 \times 15 \\ &= (15)^3\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \sqrt[3]{3375} = 15$$

ตัวอย่าง 1.29 จงหา $\sqrt[3]{-64}$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad \text{เนื่องจาก } 64 &= (2 \times 32) \\ &= 2 \times 2 \times 16 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 8 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 4 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \\ &= (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2) \\ &= (4) \times (4) \times (4) \\ &= (4)^3\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \sqrt[3]{-64} = -4$$

1.3.3 รากที่ n

บทนิยาม 1.10

ให้ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ n เป็นจำนวนเต็มซึ่งมากกว่า 1
 b เป็นรากที่ n ของ a ก็ต่อเมื่อ $b^n = a$

ตัวอย่าง 1.30

$3^4 = 81$ ดังนั้น 3 เป็นรากที่ 4 ของ 81

$(-3)^4 = 81$ ดังนั้น -3 เป็นรากที่ 4 ของ 81

$(-7)^3 = -343$ ดังนั้น -7 เป็นรากที่ 3 ของ -343

บทนิยาม 1.11

ให้ a เป็นจำนวนจริง n เป็นจำนวนเต็มซึ่งมากกว่า 1 และมีจำนวนจริงที่เป็นรากที่ n แล้วเรียก $\sqrt[n]{a}$ ว่าค่าหลักของรากที่ n ของ a โดยที่

1. ถ้า $a > 0$ แล้ว $\sqrt[n]{a}$ คือรากที่ n ที่เป็นจำนวนจริงบวกของ a
2. ถ้า $a = 0$ แล้ว $\sqrt[n]{a} = 0$
3. ถ้า $a < 0$ และ n เป็นจำนวนคี่ $\sqrt[n]{a}$ คือรากที่ n ที่เป็นจำนวนจริงลบของ a

ตัวอย่าง 1.31

ค่าหลักของรากที่ 5 ของ 32 คือ 2

ค่าหลักของรากที่ 4 ของ 81 คือ 3

ค่าหลักของรากที่ 3 ของ -64 คือ -4

ค่าหลักของรากที่ 7 ของ -10 คือ $\sqrt[7]{-10}$

ไม่มีค่าหลักของรากที่ 4 ของ -81 ในระบบจำนวนจริง

ข้อสังเกต

กรณี n เป็นจำนวนเต็มคู่ และ a เป็นจำนวนจริงลบ จะไม่มีจำนวนจริงใดเป็นรากที่ n ของ a ดังนั้น $\sqrt[n]{a}$ จะไม่นิยาม

ตัวอย่าง 1.32 จงหารากที่สี่ของ 2401

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad \text{พิจารณา } 2401 &= 7 \times 343 \\ &= 7 \times 7 \times 49 \\ &= 7 \times 7 \times 7 \times 7 \\ &= 7^4\end{aligned}$$

$$\text{เนื่องจาก } 7^4 = (-7)^4 = 2401$$

ดังนั้น รากที่สี่ของ 2401 คือ 7 และ -7

ตัวอย่าง 1.33 จงหา $\sqrt[4]{2401}$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad \text{เนื่องจาก } \sqrt[4]{2401} &= \sqrt[4]{7^4} \\ &= |7| \\ &= 7\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \sqrt[4]{2401} = 7$$

เมื่อเราศึกษาบทนิยามสามารถหาค่าราก และค่าหลักของรากต่าง ๆ ได้แล้ว ต่อไปเราจะศึกษาสมบัติของรากที่ n ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้(ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา, 2555 : 7-9)

ทฤษฎีบท 1.36

$$\text{ถ้า } x \text{ และ } y \text{ มีรากที่ } n \text{ แล้ว } \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$$

ตัวอย่าง 1.34 จงทำ $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{-16}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad \text{เนื่องจาก } \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{-16} &= \sqrt[3]{4(-16)} \\ &= \sqrt[3]{-64} \\ &= \sqrt[3]{(-4)^3} \\ &= -4\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{-16} = -4$$

ทฤษฎีบท 1.37

$$\text{ถ้า } x \text{ และ } y \text{ มีรากที่ } n \text{ และ } y \neq 0 \text{ แล้ว } \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$$

ตัวอย่าง 1.35 จงทำ $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \text{เนื่องจาก } \frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}} &= \sqrt[4]{\frac{32}{2}} \\ &= \sqrt[4]{16} \\ &= \sqrt[4]{(2)^4} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{-16} = 2$$

ตัวอย่าง 1.35 จงทำ $\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{p^3 r^{-9}}{8p^{-3} r^{-6}}}}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย เมื่อกำหนดให้ $p > 0$ และ $r > 0$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \text{เนื่องจาก } \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{p^3 r^{-9}}{8p^{-3} r^{-6}}}} &= \frac{1}{\left(\frac{p^3 r^{-9}}{8p^{-3} r^{-6}}\right)^{\frac{1}{3}}} \\ &= \left(\frac{p^{3-(-3)} r^{-9-(-6)}}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} \\ &= \left(\frac{p^6 r^{-3}}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{p^3 r^{-9}}{8p^{-3} r^{-6}}}} = \left(\frac{p^6 r^{-3}}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

สรุปท้ายบทที่ 1

จากเนื้อหาที่ผ่านมาได้กล่าวถึงเซตของจำนวนชนิดต่าง ๆ สมบัติพื้นฐานของระบบจำนวนจริง สมบัติอันดับของจำนวนจริงการ แก้วสมการเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม การแก้สมการเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นเศษส่วนการแก้สมการเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ การแก้สมการเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนอตรรกยะการแก้สมการเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนจริงใดๆ การหารากที่สองและรากที่ ด้วยวิธีการต่าง ๆ โดยเอกสารเล่มนี้แสดงด้วยการให้ตัวอย่างที่ไม่ยากเพื่อให้่ายต่อความเข้าใจ ระบบจำนวนจริงเป็นพื้นฐานการเรียนรู้คณิตศาสตร์ขั้นสูงเป็นพื้นฐานในการเรียนสาขาวิชาต่าง ๆ เนื่องจากจำนวนจริงเป็นจำนวนที่ใช้กันในชีวิตประจำวัน ทั้งจำนวนนับ จำนวนเต็มจำนวนตรรกยะ จำนวนอตรรกยะ รวมไปถึงตัวดำเนินการต่าง ๆ ของจำนวนจริง ทั้งการบวก การคูณแคลคูลัส ฟังก์ชันค่าจริง นอกจากนี้ยังมีคุณสมบัติต่างๆที่จะใช้เป็นพื้นฐานในการเรียนในรายวิชาขั้นสูงต่อไปอีกด้วย

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1

1. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 1.10, 1.11, 1.15 , 1.17, 1.24, 1.26
2. กำหนดให้

$N =$ เซตของจำนวนนับ

$I =$ เซตของจำนวนเต็ม

$Q =$ เซตของจำนวนตรรกยะ

$R =$ เซตของจำนวนจริง

แล้วข้อสรุปใดต่อไปนี้ถูกต้อง

2.1 $I \subset N$

2.2 $Q \subset N$

2.3 $I \subset R$

2.4 $I \cap N = \emptyset$

2.5 $Q' \subset R$

3. จงแสดงวิธีทำเพื่อหาค่าในข้อต่อไปนี้

3.1 1^0

3.2 $2^{-3} \times (2 \times 3)^3$

3.3 $a^{n+1} \times a^{n-1}$

3.4 $2^n + 2^{n-2} + 2^{n+2}$

3.5 ถ้า $(125)^{-y} = 8$ แล้ว $(25)^{2y}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

4. จงทำให้เป็นรูปอย่างง่ายและมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

4.1 $\frac{7^9(1^0)^2}{7^7}$

4.2 $\frac{(2a^7)(3a^2)}{6a^3}$

4.3 $\left(\frac{2ab^6}{a^3b^3}\right)^{-2}$

4.4 $\frac{a^3b^2c^{-4}}{a^{-2}b^5c^{-9}}$

4.5 $\left(\frac{p^{-2}q^4r}{p^3q^5}\right)^5$

4.6 $\frac{(5a^2)(6b^3)}{(2a^3)(25b^{-2})}$

4.7 $\frac{2^{n+3}}{5^{n+1}} \times \frac{6^{2-n}}{15^{-n-1}}$

5. จงหารากที่สองโดยวิธีการแยกตัวประกอบ

5.1 $\sqrt{4225}$

5.2 $\sqrt{7396}$

5.3 $\sqrt{1936}$

5.3 $\sqrt{441}$

6. จงหาค่าประมาณโดยวิธีเฉลี่ย ให้ได้ค่าถึงทศนิยม 1 ตำแหน่ง

5.1 $\sqrt{6}$

5.2 $\sqrt{12}$

5.3 $\sqrt{24}$

5.3 $\sqrt{30}$

7. จงหารากที่สองโดยวิธีการตั้งหาร

7.1 $\sqrt{123}$

7.2 $\sqrt{441}$

7.3 $\sqrt{1936}$

7.3 $\sqrt{7396}$

7.5 $\sqrt{4225}$

7.6 $\sqrt{10936}$

7.6 $\sqrt{115}$

7.7 $\sqrt{921}$

8. จงหารากที่สามโดยวิธีการแยกตัวประกอบ

8.1 $\sqrt[3]{8}$

8.2 $\sqrt[3]{15625}$

8.3 $\sqrt[3]{-343}$

8.4 $\sqrt[3]{2197}$

9. จงทำให้เป็นรูปอย่างง่าย

9.1 $\sqrt{27x^2}$

9.2 $\frac{4}{\sqrt[3]{-64}}$

9.3 $4\sqrt{45} - 3\sqrt{20} + 8\sqrt{5}$

9.4 $11\sqrt[3]{56} - 6\sqrt[3]{875} - 3\sqrt[3]{189}$

9.5 $\sqrt{252} + 2\sqrt{294} - 12\sqrt{\frac{1}{6}}$

10. จงทำให้ตัวส่วนอยู่ในรูปไม่ตรรกกรณ์

10.1 $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

10.2 $\frac{2}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$

10.3 $\frac{1}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{5}}$

เอกสารอ้างอิง

- คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง. (2542). **แคลคูลัสและ
เรขาคณิตวิเคราะห์ 1**. พิมพ์ครั้งที่ 8 กรุงเทพมหานคร : มหาวิทยาลัยรามคำแหง.
- จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. (2551). **คู่มือเตรียมสอบ O-NET กลุ่มสาระคณิตศาสตร์**.
กรุงเทพมหานคร : พ.ศ. พัฒนาจำกัด
- ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. (2555). **คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม.5**. กรุงเทพมหานคร : แม็ค.
- ปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร. (2547). **หลักการคณิตศาสตร์**. กรุงเทพมหานคร : ด้านสุทธาการพิมพ์.
- เวชชัย สังข์สาย. (2536). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน**. สุรินทร์ : ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ
วิทยาลัยครูสุรินทร์.
- สุชิน ทำมาหากิน. (2540). **คู่มือคณิตศาสตร์ ม.3**. กรุงเทพมหานคร : มิตรสัมพันธ์ กราฟฟิคอาร์ต.
- สุเทพ จันท์สมศักดิ์. (2533). **ระบบจำนวน**. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- สุเทพ ทองอยู่ และสุเทพ จันท์สมศักดิ์. (2533). **คณิตศาสตร์ ม.4 เล่ม 1**. ภูมิบัณฑิต.
- _____ . (2535). **คณิตศาสตร์รวม ม.4-5-6 เล่ม 1**. ภูมิบัณฑิต.

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 2

เนื้อหาประจำบท

1. นิพจน์พีชคณิต
2. อนุกรมการแยกตัวประกอบ
3. สมการและอสมการ

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. สามารถแปลงประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์ได้
2. สามารถแยกตัวประกอบพหุนามระดับชั้นสองได้
3. แยกตัวประกอบพหุนาม $x^2 + bx + c$ เมื่อ $c = m \times n$ และ $b = m + n$
4. แยกตัวประกอบพหุนาม $ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a = p \times q, c = m \times n$
5. แยกตัวประกอบพหุนามระดับชั้นสองที่เป็นผลต่างกำลังสองได้
6. แยกตัวประกอบพหุนามระดับชั้นสองโดยวิธีทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์ได้
7. แยกตัวประกอบพหุนามระดับชั้นสามได้
8. แยกตัวประกอบผลบวกกำลังสามและการแยกตัวประกอบผลต่างกำลังสาม
9. แยกตัวประกอบกำลังสามของผลบวก และกำลังสามของผลต่างได้
10. แยกตัวประกอบของพหุนามระดับชั้นสูงกว่าสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มได้
11. แยกตัวประกอบของพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มโดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ
12. แก้สมการตัวแปรเดียวได้
13. สามารถหาผลเฉลยของอสมการได้

วิธีการสอนและกิจกรรมการเรียนรู้การสอนประจำบท

1. ผู้สอนบรรยายหัวข้อต่อไปนี้พร้อมเปิดโอกาสให้ซักถาม
 - 1.1 นิพจน์พีชคณิต
 - 1.2 อนุกรมการแยกตัวประกอบ
 - 1.3 สมการและอสมการ
2. ให้นักศึกษาทำกิจกรรมต่อไปนี้
 - 2.1 ศึกษาข้อมูล เกี่ยวกับเรื่องพหุนามการแยกตัวประกอบเพิ่มเติม
 - 2.2 ทำแบบฝึกหัดที่กำหนดให้

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนและตำราต่าง ๆ
2. Slide Presentation

การวัดผลและการประเมินผล

1. สังเกตความสนใจของนักศึกษาขณะสอน ความตั้งใจ การฟัง การจดบันทึก และการซักถาม
2. แบบฝึกหัด
3. แบบทดสอบ
4. การมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอน

บทที่ 2

พหุนามและการแยกตัวประกอบ

ก่อนที่เราจะศึกษาพหุนามนั้นในเอกสารฉบับนี้ได้กล่าวถึงนิพจน์พีชคณิต ซึ่งเป็นวิชาที่ศึกษาการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ด้วยกระบวนการที่อาจสร้างขึ้นในรูปของนิพจน์ที่ประกอบด้วยสัญลักษณ์ในรูปตัวแปรซึ่งสามารถใช้แทนตัวเลข ทำให้วิธีการทางพีชคณิต ซึ่งสิ่งต่าง ๆ เหล่านี้สามารถถูกแทนด้วยสัญลักษณ์ทางพีชคณิตซึ่งเป็นการแปลงประโยคภาษา เป็นประโยคสัญลักษณ์ ในรูปแบบต่าง ๆ เช่นนิพจน์ที่อยู่ในรูป $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ $a_0, a_1, \dots, a_n$ เป็นจำนวนใด ๆ ซึ่งเรียกว่าพหุนามนั่นเอง ซึ่งเมื่อเรารู้จักรูปแบบของพหุนามแล้วเราสามารถนำหลักการและทฤษฎีบทต่าง ๆ ในการแยกตัวประกอบเพื่อนำไปสู่การแก้สมการและอสมการในรูปแบบต่าง ๆ เพราะการหาผลเฉลยของสมการและอสมการกำลังสองขึ้นไปนั้นถ้าได้ศึกษาการแยกตัวประกอบได้เข้าใจแล้วเป็นอย่างดีแล้วก็ไม่เป็นเรื่องยากที่จะสามารถหาผลเฉลยของสมการและอสมการได้และในบทนี้จะแบ่งเนื้อหาเป็น 3 เรื่อง ได้แก่ นิพจน์พีชคณิต การแยกตัวประกอบพหุนาม สมการและอสมการ ดังนี้

2.1 นิพจน์พีชคณิต

นิพจน์พีชคณิต มาจากคำสองคำคือคำว่า นิพจน์ และ พีชคณิต ซึ่งพีชคณิตเป็นวิชาแขนงหนึ่งในคณิตศาสตร์เช่นเดียวกับเรขาคณิต หรือตรีโกณมิติ แต่พีชคณิตเป็นวิชาที่จะศึกษาการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ด้วยกระบวนการที่อาจสร้างขึ้นในรูปของนิพจน์ที่ประกอบด้วยสัญลักษณ์ในรูปตัวแปรซึ่งสามารถใช้แทนตัวเลขเซตของฟังก์ชัน หรืออะไรก็ได้ จึงทำให้วิธีการทางพีชคณิตสามารถใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาหรือสนับสนุนงานทางคณิตศาสตร์หลายสาขา เช่น ทางด้านเครื่องข่าย ติดต่อสื่อสาร กฎทางฟิสิกส์ แบบจำลองประชากร ผลเชิงสถิติ ซึ่งสิ่งต่าง ๆ เหล่านี้สามารถถูกแทนด้วยสัญลักษณ์ทางพีชคณิตซึ่งเป็นการแปลงประโยคภาษา เป็นประโยคสัญลักษณ์ ดังจะกล่าวในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.1 ประโยคภาษาและประโยคสัญลักษณ์

ประโยคภาษา	ประโยคสัญลักษณ์
ศูนย์น้อยกว่าสาม	$0 < 3$
เจ็ดบวกสามได้สิบ	$7 + 3 = 10$
สองเท่าของสามจุดหกมากกว่าเจ็ด	$2(3.6) > 7$
สามบวกกับจำนวนหนึ่งได้สิบ	$3 + n = 10$
สองเท่าของจำนวนจำนวนหนึ่งมีค่าน้อยกว่าสิบ	$2x < 10$

หมายเหตุ

ประโยคสัญลักษณ์จะมีตัวแปรหรือไม่ก็ได้

ในการเปลี่ยนประโยคภาษาให้เป็นประโยคสัญลักษณ์ นั้นต้องรู้จักการใช้สัญลักษณ์แทนส่วนที่กล่าวถึงจำนวน และส่วนที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนดังตัวอย่างต่อไปนี้ (จารุณี สุตะบุตร และคณะ, 2533 : 2)

ประโยคภาษา : สามเท่าของจำนวนจำนวนหนึ่งมีค่าเท่ากับยี่สิบเอ็ด

ประโยคสัญลักษณ์ :
$$\begin{array}{ccccc} & 3x & = & 21 \\ & \text{(จำนวน)} & & \text{(ความสัมพันธ์)} & \text{(จำนวน)} \end{array}$$

ในบางครั้งจะมีข้อความที่ยังไม่ได้เป็นประโยคกล่าวถึงเพียงแค่จำนวน แต่ยังไม่ใช่ประโยคเรียกว่านิพจน์ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.2 ตัวอย่างของนิพจน์

1. 5 เท่าของ x
2. หนึ่งในสี่ของ b
3. จำนวนซึ่งน้อยกว่า x อยู่ 7
4. จำนวนที่มากกว่า y อยู่ 21
5. ผลต่างของ y และ 12

จากตัวอย่างที่ผ่านมาจะแสดงถึงข้อความที่ยังไม่เป็นประโยคหรือนิพจน์ ประโยคภาษา และประโยคสัญลักษณ์ จะเห็นได้ว่าการที่จะเป็นประโยคได้นั้นต้องแสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนนั่นเอง ดังที่ได้แสดงในตัวอย่างซึ่งความสัมพันธ์ในพีชคณิตนั้นก็จะได้กล่าวในบทนิยามต่อไปนี้(จารุณี สุตะบุตร และคณะ, 2533 : 3)

บทนิยาม 2.1

ประโยคสัญลักษณ์ที่กล่าวถึงความสัมพันธ์ของจำนวนโดยมีสัญลักษณ์
= (เท่ากับ) บอกความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน เรียกว่า **สมการ**

นอกจากสัญลักษณ์ = แล้วยังมีสัญลักษณ์ $>$ แทนความสัมพันธ์ มากกว่า

$<$ แทนความสัมพันธ์ น้อยกว่า

และ

$\neq$ แทนความสัมพันธ์ ไม่เท่ากับ หรือ ไม่เท่ากัน

นอกจากสัญลักษณ์ดังกล่าวแล้ว เรายังใช้สัญลักษณ์ $\leq$ แทนความสัมพันธ์น้อยกว่าหรือเท่ากับ สัญลักษณ์ $\geq$ แทนความสัมพันธ์มากกว่าหรือเท่ากับ เช่น

$x \leq 2$ อ่านว่า x น้อยกว่าหรือเท่ากับ 2 หมายถึง
 $x < 2$ หรือ $x = 2$ อีกนัยหนึ่งคือ
 x มีค่าไม่เกิน 2

$a \geq b$ อ่านว่า a น้อยกว่าหรือเท่ากับ b หมายถึง
 $a > b$ หรือ $a = b$ อีกนัยหนึ่งคือ
 a มีค่าไม่น้อยกว่า b

บทนิยาม 2.2

ประโยคสัญลักษณ์ที่กล่าวถึงความสัมพันธ์ของจำนวนโดยมีสัญลักษณ์
 $<, >, \leq, \geq$ หรือ $\neq$ บอกความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน เรียกว่า **อสมการ**

2.2 การแยกตัวประกอบพหุนาม

ก่อนที่เราจะไปศึกษาการแยกตัวประกอบพหุนามนั้นผู้เรียนต้องรู้จักคำว่าพหุนามก่อน ซึ่งพหุนามคือนิพจน์ที่อยู่ในรูป $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ $a_0, a_1, \dots, a_n$ เป็นจำนวนใด ๆ เมื่อ $a_n \neq 0$ และพหุนามนี้มีระดับชั้น n เรียกสมการที่อยู่ในรูป $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ เรียก $a_0, a_1, \dots, a_n$ ว่า สัมประสิทธิ์ของพหุนาม เรียกพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นศูนย์ทั้งหมดว่า พหุนามศูนย์ เรียกฟังก์ชันซึ่งค่าของฟังก์ชันเป็นพหุนามว่า ฟังก์ชันพหุนาม (แก้ว สงขาว และคณะ, 2553 : 202)

ตัวอย่าง 2.3

$2x^5 + x^3 + 8$	พหุนามระดับชั้น 5
$5x^3 + 3x^2$	พหุนามระดับชั้น 3
$x^2 + \sqrt{3}x - 1$	พหุนามระดับชั้น 2

เมื่อเราทราบข้อมูลเบื้องต้นต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับพหุนามแล้วต่อไปจะเป็นการศึกษาการแยกตัวประกอบพหุนามโดยจะเริ่มศึกษาจากการแยกตัวประกอบพหุนามจากง่ายไปหายากตามหัวข้อต่อไป

2.2.1 การแยกตัวประกอบพหุนามระดับชั้นสอง

สำหรับการแยกตัวประกอบพหุนามระดับชั้นสองนี้พหุนามที่เราจะศึกษาในหัวข้อนี้เป็นพหุนามระดับชั้นสองที่มีตัวแปรเดียวเท่านั้น ดังจะกล่าวในบทนิยามต่อไปนี้ (กมล เอกไทยเจริญ, 2552 : 265)

บทนิยาม 2.3

พหุนามระดับชั้นสองคือพหุนามที่อยู่ในรูป $ax^2 + bx + c$ เมื่อ x เป็นตัวแปร และ a, b, c เป็นค่าคงตัวโดยที่ $a \neq 0$ เรียกว่า **พหุนามดีกรีสองที่มีตัวแปรเดียว**

จากบทนิยาม 2.3

เรียก a ว่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรยกกำลังสอง

เรียก b ว่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรยกกำลังหนึ่ง

เรียก c ว่าค่าคงตัว

ตัวอย่าง 2.4 ตัวอย่างของพหุนามดีกรีสองที่มีตัวแปรเดียวพร้อมทั้งหาสัมประสิทธิ์ของตัวแปรกำลังสอง (a) สัมประสิทธิ์ของตัวแปรกำลังหนึ่ง (b) และค่าคงตัว (c)

พหุนาม	a	b	c
$x^2 + 3x + 4$	1	3	4
$2x^2 - x + 5$	2	-1	5
$x^2 - 3x$	1	-3	0
$7x^2 - 1$	7	0	-1
$4x^2$	4	0	0

เมื่อเราทราบนิยามพร้อมทั้งได้เห็นตัวอย่างพหุนามดีกรีสองที่มีตัวแปรเดียวแล้วต่อไปจะเป็นการแยกตัวประกอบพหุนามวิธีต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

1). การแยกตัวประกอบพหุนาม $x^2 + bx + c$ เมื่อ $c = m \times n$ และ $b = m + n$

สำหรับกรณีนี้จึงเป็นการแยกพหุนามที่อยู่ในรูป $ax^2 + bx + c$ และ $a = 1$ โดยที่สามารถหา m และ n ได้เท่านั้น และเมื่อหา m และ n ได้แล้วนั้นจึงทำให้การแยกตัวประกอบพหุนามมีรูปแบบดังนี้

$$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$$

ตัวอย่าง 2.5 จงแยกตัวประกอบของ $x^2 + 5x + 6$

วิธีทำ เนื่องจาก $6 = 3 \times 2$

และ $5 = 3 + 2$

ดังนั้น $x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$

ตัวอย่าง 2.6 จงแยกตัวประกอบของ $x^2 - 5x + 6$

วิธีทำ เนื่องจาก $6 = (-3) \times (-2)$

และ $-5 = (-3) + (-2)$

ดังนั้น $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$

ตัวอย่าง 2.7 จงแยกตัวประกอบของ $x^2 - 3x - 10$

วิธีทำ เนื่องจาก $-10 = (-5) \times 2$

และ $-3 = (-5) + 2$

ดังนั้น $x^2 - 3x - 10 = (x - 5)(x + 2)$

ตัวอย่าง 2.8 จงแยกตัวประกอบของ $x^2 + 3x - 10$

วิธีทำ เนื่องจาก $-10 = 5 \times (-2)$

และ $3 = 5 + (-2)$

ดังนั้น $x^2 + 3x - 10 = (x + 5)(x - 2)$

2). การแยกตัวประกอบพหุนาม $ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a = p \times q, c = m \times n$

และ $b = (p \times n) + (q \times m)$ สำหรับกรณีนี้จึงเป็นการแยกพหุนามที่อยู่ในรูป $ax^2 + bx + c$ และ $a \neq 0$ โดยที่สามารถหา m, n, p และ q ได้เท่านั้น โดยมีวิธีการหาดังต่อไปนี้

1. กำหนดพหุนามดีกรีสอง $ax^2 + bx + c$

2. ถ้ามี m, n, p และ q ที่ทำให้

$$a = p \times q$$

$$c = m \times n$$

$$b = (p \times n) + (q \times m)$$

3. พิจารณาผลคูณ $(px + m)(qx + n)$ จะพบว่า

$$\begin{aligned}(px + m)(qx + n) &= pqx^2 + pnx + qmx + mn \\ &= pqx^2 + (pn + qm)x + mn \\ &= ax^2 + bx + c\end{aligned}$$

4. ดังนั้น สามารถแยกตัวประกอบของ $ax^2 + bx + c$ ได้ดังนี้

$$ax^2 + bx + c = (px + m)(qx + n)$$

ตัวอย่าง 2.9 จงแยกตัวประกอบของ $8x^2 + 14x + 3$

วิธีทำ เนื่องจาก $8 = 2 \times 4$

$$3 = 3 \times 1$$

$$\text{และ} \quad 14 = (2 \times 1) + (4 \times 3)$$

ดังนั้น $8x^2 + 14x + 3 = (2x + 3)(4x + 1)$

ตัวอย่าง 2.10 จงแยกตัวประกอบของ $15x^2 + x - 2$

วิธีทำ เนื่องจาก $15 = 3 \times 5$

$$-2 = (-1) \times 2$$

$$\text{และ} \quad 1 = (2 \times 3) + ((-1) \times 5)$$

ดังนั้น $15x^2 + x - 2 = (3x - 1)(5x + 2)$

ข้อสังเกต 1.1

1. กำหนดพหุนามดีกรีสอง $ax^2 + bx + c$ ถ้า $c > 0$ แล้ว m และ n จะเป็นจำนวนบวกทั้งคู่ หรือจำนวนลบทั้งคู่ โดยที่

- m และ n เป็นจำนวนบวกทั้งคู่ เมื่อ $b > 0$

- m และ n เป็นจำนวนลบทั้งคู่ เมื่อ $b < 0$

2. ถ้า $c < 0$ แล้ว m และ n จะเป็นจำนวนบวกหนึ่งจำนวน และจำนวนลบหนึ่งจำนวน จำนวนใดเป็นจำนวนบวกขึ้นอยู่กับจำนวน b

ตัวอย่าง 2.11 จงแยกตัวประกอบของ $-12x^2 + x + 6$

วิธีทำ เนื่องจาก $-12x^2 + x + 6 = -(12x^2 - x - 6)$

$$\text{และ} \quad 12 = 4 \times 3$$

$$-6 = (-3) \times 2$$

$$1 = (4 \times 2) + (3 \times (-3))$$

$$\text{จะได้ว่า } -(12x^2 - x - 6) = -(4x - 3)(3x + 2)$$

$$\text{หรือ} \quad = (-4x + 3)(3x + 2)$$

$$\text{หรือ} \quad = (4x - 3)(-3x - 2)$$

ดังนั้น $-12x^2 + x + 6 = -(4x - 3)(3x + 2)$ หรือ $(-4x + 3)(3x + 2)$ หรือ $(4x - 3)(-3x - 2)$

3). การแยกตัวประกอบพหุนามระดับชั้นสองที่เป็นผลต่างกำลังสอง การแยกตัวประกอบพหุนามระดับชั้นสองที่เป็นผลต่างกำลังสองเป็นการแยกตัวประกอบโดยใช้สูตรของผลต่างกำลังสองมีรูปแบบดังนี้ (กมล เอกไทยเจริญ, 2552 : 269)

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$$

ตัวอย่าง 2.12 ตัวอย่างการแยกตัวประกอบโดยใช้สูตรผลต่างของกำลังสองเบื้องต้น

$$x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x - 1)(x + 1)$$

$$x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x - 2)(x + 2)$$

$$4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x - 3)(2x + 3)$$

$$\frac{1}{9}x^2 - 25 = \left(\frac{1}{3}x\right)^2 - 5^2 = \left(\frac{1}{3}x - 5\right)\left(\frac{1}{3}x + 5\right)$$

การแยกตัวประกอบโดยใช้สูตรผลต่างของกำลังสอง ที่จะกล่าวต่อไปมีส่วนเกี่ยวข้องกับจำนวนในรูปแบบกรณฑ์ที่สอง ซึ่งได้กล่าวมาแล้วในเนื้อหาบทที่ผ่านมา ต่อไปนี้จะเป็นตัวอย่างการแยกตัวประกอบของพหุนามระดับชั้นสองซึ่งใช้สูตรของผลต่างกำลังสองและเกี่ยวข้องกับจำนวนที่อยู่ในรูปแบบกรณฑ์ที่สอง

ตัวอย่าง 2.13 จงแยกตัวประกอบของ $x^2 - 2$

วิธีทำ เนื่องจาก $2 = (\sqrt{2})^2$

$$\text{นั่นคือ} \quad x^2 - 2 = x^2 - (\sqrt{2})^2$$

$$= (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

ดังนั้น $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

ตัวอย่าง 2.14 จงแยกตัวประกอบของ $5x^2 - 4$

วิธีทำ เนื่องจาก $4 = 2^2$ และ $5 = (\sqrt{5})^2$

$$\begin{aligned}\text{นั่นคือ } 5x^2 - 4 &= (\sqrt{5}x)^2 - 2^2 \\ &= (\sqrt{5}x - 2)(\sqrt{5}x + 2)\end{aligned}$$

ดังนั้น $5x^2 - 4 = (\sqrt{5}x - 2)(\sqrt{5}x + 2)$

ตัวอย่าง 2.15 จงแยกตัวประกอบของ $3x^2 - 7$

วิธีทำ เนื่องจาก $3 = (\sqrt{3})^2$ และ $7 = (\sqrt{7})^2$

$$\begin{aligned}\text{นั่นคือ } 3x^2 - 7 &= (\sqrt{3}x)^2 - (\sqrt{7})^2 \\ &= (\sqrt{3}x - \sqrt{7})(\sqrt{3}x + \sqrt{7})\end{aligned}$$

ดังนั้น $3x^2 - 7 = (\sqrt{3}x - \sqrt{7})(\sqrt{3}x + \sqrt{7})$

ตัวอย่าง 2.16 จงแยกตัวประกอบของ $(x - 2)^2 - 5$

วิธีทำ เนื่องจาก $5 = (\sqrt{5})^2$

$$\begin{aligned}\text{นั่นคือ } (x - 2)^2 - 5 &= (x - 2)^2 - (\sqrt{5})^2 \\ &= ((x - 2) - \sqrt{5})((x - 2) + \sqrt{5}) \\ &= (x - 2 - \sqrt{5})(x - 2 + \sqrt{5})\end{aligned}$$

ดังนั้น $(x - 2)^2 - 5 = (x - 2 - \sqrt{5})(x - 2 + \sqrt{5})$

ตัวอย่าง 2.17 จงแยกตัวประกอบของ $\frac{16}{25}(x - 1)^2 - 32$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{16}{25} = \left(\frac{4}{5}\right)^2$ และ

$$32 = (\sqrt{32})^2 = (\sqrt{4 \times 4 \times 2})^2 = (4\sqrt{2})^2$$

$$\text{นั่นคือ } \frac{16}{25}(x - 1)^2 - 32 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 (x - 1)^2 - (4\sqrt{2})^2$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{4}{5}(x-1) \right)^2 - (4\sqrt{2})^2 \\
&= \left[\left(\frac{4}{5}(x-1) \right) - 4\sqrt{2} \right] \left[\left(\frac{4}{5}(x-1) \right) + 4\sqrt{2} \right] \\
&= \left(\frac{4}{5}x - \frac{4}{5} - 4\sqrt{2} \right) \left(\frac{4}{5}x - \frac{4}{5} + 4\sqrt{2} \right)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{16}{25}(x-1)^2 - 32 = \left(\frac{4}{5}x - \frac{4}{5} - 4\sqrt{2} \right) \left(\frac{4}{5}x - \frac{4}{5} + 4\sqrt{2} \right)$

ตัวอย่าง 2.18 จงแยกตัวประกอบของ $48 - \frac{9}{8}(2x+1)^2$

วิธีทำ เนื่องจาก $48 = (\sqrt{48})^2 = (\sqrt{4 \times 4 \times 3})^2 = (4\sqrt{3})^2$ และ

$$\frac{9}{8} = \left(\sqrt{\frac{9}{8}} \right)^2 = \left(\sqrt{\frac{3 \times 3}{2 \times 2 \times 2}} \right)^2 = \left(\frac{3}{2\sqrt{2}} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
\text{นั่นคือ } 48 - \frac{9}{8}(2x+1)^2 &= (4\sqrt{3})^2 - \left(\frac{3}{2\sqrt{2}} \right)^2 (2x+1)^2 \\
&= (4\sqrt{3})^2 - \left(\frac{3}{2\sqrt{2}}(2x+1) \right)^2 \\
&= (4\sqrt{3})^2 - \left(\frac{3x}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2\sqrt{2}} \right)^2 \\
&= \left[(4\sqrt{3}) - \left(\frac{3x}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2\sqrt{2}} \right) \right] \left[(4\sqrt{3}) + \left(\frac{3x}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2\sqrt{2}} \right) \right] \\
&= \left(4\sqrt{3} - \frac{3x}{\sqrt{2}} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \right) \left(4\sqrt{3} + \frac{3x}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2\sqrt{2}} \right)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $48 - \frac{9}{8}(2x+1)^2 = \left(4\sqrt{3} - \frac{3x}{\sqrt{2}} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \right) \left(4\sqrt{3} + \frac{3x}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2\sqrt{2}} \right)$

4). การแยกตัวประกอบพหุนามระดับชั้นสองโดยวิธีทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์ การแยกตัวประกอบพหุนามระดับชั้นสองโดยวิธีทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์เป็นการแยกตัวประกอบโดยใช้สูตรกำลังสองสมบูรณ์ ดังต่อไปนี้ (กมล เอกไทยเจริญ, 2552 : 272-278)

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2 \quad \text{และ}$$

$$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$$

เมื่อ A และ B เป็นค่าคงที่ใด ๆ สำหรับการใส่สูตรกำลังสองสมบูรณ์ เพื่อให้พหุนามดีกรีสอง ให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์

ตัวอย่าง 2.19 การแยกตัวประกอบพหุนามระดับขึ้นสองโดยวิธีทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

$$1. x^2 + 2(3)x + 3^2 = (x + 3)^2$$

$$2. x^2 - 3(2)x + 2^2 = (x - 2)^2$$

$$3. x^2 + 2(10)x + 10^2 = (x + 10)^2$$

$$4. (2x)^2 - 2(5)(2x) + 5^2 = (2x - 5)^2$$

ตัวอย่าง 2.20 จงแยกตัวประกอบของ $x^2 + 2\sqrt{5}x + 5$

วิธีทำ เนื่องจาก $5 = (\sqrt{5})^2$

$$\begin{aligned} \text{นั่นคือ } x^2 + 2\sqrt{5}x + 5 &= x^2 + 2\sqrt{5}x + (\sqrt{5})^2 \\ &= (x + \sqrt{5})^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x^2 + 2\sqrt{5}x + 5 = (x + \sqrt{5})^2$

ตัวอย่าง 2.21 จงแยกตัวประกอบของ $4x^2 - 8\sqrt{3}x + 12$

วิธีทำ เนื่องจาก $4 = (\sqrt{4})^2 = (\sqrt{2 \times 2})^2 = 2^2$ และ

$$12 = (\sqrt{12})^2 = (\sqrt{2 \times 2 \times 3})^2 = 2(\sqrt{3})^2 \quad \text{และ}$$

$$8\sqrt{3}x = 2(4\sqrt{3}) = 2 \times 2 \times 2\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \text{นั่นคือ } 4x^2 - 8\sqrt{3}x + 12 &= (2x)^2 - 2 \times 2 \times 2\sqrt{3}x + 2(\sqrt{3})^2 \\ &= (2x)^2 - 2 \times 2\sqrt{3}(2x) + 2(\sqrt{3})^2 \\ &= (2x)^2 - 2(2\sqrt{3})(2x) + 2(\sqrt{3})^2 \\ &= (2x - 2\sqrt{3})^2 \\ &= \left(2(x - \sqrt{3})\right)^2 \\ &= 2^2(x - \sqrt{3})^2 \\ &= 4(x - \sqrt{3})^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $4x^2 - 8\sqrt{3}x + 12 = 4(x - \sqrt{3})^2$

จากการสังเกตพหุนามในตัวอย่าง 2.21 พบว่า แต่ละพจน์ของพหุนามมีตัวประกอบร่วมคือ 4 ดังนั้น เพื่อทำให้ง่ายขึ้นอาจแยกตัวประกอบได้อีกวิธีหนึ่ง ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
 4x^2 - 8\sqrt{3}x + 12 &= 4(x^2 - 2\sqrt{3}x + 3) \\
 &= 4\left[x^2 - 2\sqrt{3}x + (\sqrt{3})^2\right] \\
 &= 4(x^2 - \sqrt{3})^2
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.22 จงแยกตัวประกอบของ $2x^2 + 6\sqrt{6}x + 27$

วิธีทำ เนื่องจาก $2 = (\sqrt{2})^2$ และ

$$6\sqrt{6} = 2 \times 3\sqrt{2 \times 3} \quad \text{และ}$$

$$27 = (\sqrt{27})^2 = (\sqrt{3 \times 3 \times 3})^2 = (3\sqrt{3})^2$$

$$\begin{aligned}
 \text{นั่นคือ } 2x^2 + 6\sqrt{6}x + 27 &= (\sqrt{2}x)^2 + 2 \times 3\sqrt{2 \times 3}x + (3\sqrt{3})^2 \\
 &= (\sqrt{2}x)^2 + 2(3\sqrt{2 \times 3})x + 3\sqrt{3}^2 \\
 &= (\sqrt{2}x)^2 + 2(3)(\sqrt{2})(\sqrt{3})x + 3\sqrt{3}^2 \\
 &= (\sqrt{2}x)^2 + 2(3\sqrt{3})(\sqrt{2}x) + 3\sqrt{3}^2 \\
 &= (\sqrt{2}x + 3\sqrt{3})^2
 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } 2x^2 + 6\sqrt{6}x + 27 = (\sqrt{2}x + 3\sqrt{3})^2$$

ตัวอย่าง 2.23 จงแยกตัวประกอบของ $\frac{1}{4}x^2 + 2\sqrt{5}x + 20$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{1}{4} = \left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^2$ และ

$$20 = (\sqrt{20})^2 = (\sqrt{2 \times 2 \times 5})^2 = (2\sqrt{5})^2$$

$$\begin{aligned}
 \text{นั่นคือ } \frac{1}{4}x^2 + 2\sqrt{5}x + 20 &= \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 2\sqrt{5}x + (2\sqrt{5})^2 \\
 &= \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 2(2\sqrt{5})\left(\frac{1}{2}x\right) + (2\sqrt{5})^2 \\
 &= \left(\frac{1}{2}x + 2\sqrt{5}\right)^2
 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{1}{4}x^2 + 2\sqrt{5}x + 20 = \left(\frac{1}{2}x + 2\sqrt{5}\right)^2$$

ตัวอย่าง 2.24 จงแยกตัวประกอบของ $\frac{x^2}{2} + 2\sqrt{10}x + 20$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{(\sqrt{2})^2}$ และ

$$20 = (\sqrt{20})^2 = (\sqrt{2 \times 2 \times 5})^2 = (2\sqrt{5})^2 \quad \text{และ}$$

$$2\sqrt{10} = 2\sqrt{5 \times 2}$$

$$\begin{aligned} \text{นั่นคือ } \frac{x^2}{2} + 2\sqrt{10}x + 20 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)^2 + (2\sqrt{5 \times 2})x + 2\sqrt{5}^2 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)^2 + (2\sqrt{5}\sqrt{2})x + (2\sqrt{5})^2 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)(2\sqrt{5})(\sqrt{2})x + (2\sqrt{5})^2 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}(2\sqrt{5})(\sqrt{2})x + (2\sqrt{5})^2 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\sqrt{2})(\sqrt{2})(2\sqrt{5})x + (2\sqrt{5})^2 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(2)(2\sqrt{5})x + (2\sqrt{5})^2 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)(2\sqrt{5}) + (2\sqrt{5})^2 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x + 2\sqrt{5}\right)^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{x^2}{2} + 2\sqrt{10}x + 20 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x + 2\sqrt{5}\right)^2$

พหุนามระดับชั้นสองบางพหุนามไม่สามารถแยกตัวประกอบเป็นกำลังสองสมบูรณ์ แต่สามารถใช้วิธีทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์ และใช้สูตรผลต่างของกำลังสองช่วยในการแยกตัวประกอบได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.25 จงแยกตัวประกอบของ $x^2 + 4x - 5$

วิธีทำ เนื่องจาก $x^2 + 4x - 5 = (x^2 + 4x) - 5$

จัด $(x^2 + 4x)$ ให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
&= \left((x^2 + 2(2)(x) + 2^2) \right) - 5 - 2^2 \\
&= (x + 2)^2 - 5 - 2^2 \\
&= (x + 2)^2 - 5 - 4 \\
&= (x + 2)^2 - 9 \\
&= (x + 2)^2 - 3^2 \\
&= [(x + 2) - 3][(x + 2) + 3] \\
&= (x - 1)(x + 5)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $x^2 + 4x - 5 = (x - 1)(x + 5)$

ข้อสังเกต 1.2

ผลการแยกตัวประกอบในตัวอย่างที่ 2.21

$$x^2 + 4x - 5 = (x - 1)(x + 5)$$

จะเหมือนกับการแยกตัวประกอบพหุนามระดับชั้นสองด้วยวิธีที่กล่าวมาแล้วในหัวข้อแรก
กล่าวคือ

$$\text{เนื่องจาก } 4 = -1 + 5$$

$$\text{และ } -5 = -1 \times 5$$

ดังนั้น $x^2 + 4x - 5 = (x - 1)(x + 5)$

ตัวอย่าง 2.26 จงแยกตัวประกอบของ $x^2 + 8x + 10$

วิธีทำ เนื่องจาก $x^2 + 8x + 10 = (x^2 + 8x) + 10$

จัด $x^2 + 8x$ ให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
&= \left((x^2 + 2(4)x + 4^2) \right) + 10 - 4^2 \\
&= (x + 4)^2 + 10 - 4^2 \\
&= (x + 4)^2 + 10 - 16 \\
&= (x + 4)^2 - 6 \\
&= (x + 4)^2 - (\sqrt{6})^2 \\
&= [(x + 4) - \sqrt{6}][(x + 4) + \sqrt{6}] \\
&= (x + 4 - \sqrt{6})(x + 4 + \sqrt{6})
\end{aligned}$$

ดังนั้น $x^2 + 8x + 10 = (x + 4 - \sqrt{6})(x + 4 + \sqrt{6})$

ตัวอย่าง 2.23 จงแยกตัวประกอบของ $x^2 - 7x + 10$

วิธีทำ $x^2 - 7x + 10 = (x^2 - 7x) + 10$

$$\begin{aligned}
 &= \left(x^2 + 2\left(\frac{7}{2}\right)x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 \right) + 10 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 \\
 &= \left(x^2 + 2\left(\frac{7}{2}\right)x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 \right) + 10 - \frac{49}{4} \\
 &= \left(x - \frac{7}{2} \right)^2 + \left(\frac{40}{4} - \frac{49}{4} \right) \\
 &= \left(x - \frac{7}{2} \right)^2 - \frac{9}{4} \\
 &= \left(x - \frac{7}{2} \right)^2 - \left(\frac{3}{2} \right)^2 \\
 &= \left[\left(x - \frac{7}{2} \right) - \left(\frac{3}{2} \right) \right] \left[\left(x - \frac{7}{2} \right) + \left(\frac{3}{2} \right) \right] \\
 &= \left(x - \frac{7}{2} - \frac{3}{2} \right) \left(x - \frac{7}{2} + \frac{3}{2} \right) \\
 &= \left(x - \frac{10}{2} \right) \left(x - \frac{13}{2} \right) \\
 &= (x - 5) \left(x - \frac{13}{2} \right)
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x^2 - 7x + 10 = (x - 5) \left(x - \frac{13}{2} \right)$

การแยกตัวประกอบพหุนามโดยวิธีทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์ของพหุนามระดับขั้นสองในตัวอย่างที่ผ่านมาจะพบว่า สัมประสิทธิ์ของ x^2 เท่ากับ 1 ในกรณีที่สัมประสิทธิ์ของ x^2 ไม่เท่ากับ 1 หากต้องการแยกตัวประกอบโดยวิธีกำลังสองสมบูรณ์ สามารถทำได้โดยใช้สมบัติการแจกแจงเพื่อให้สัมประสิทธิ์ของ x^2 ให้เท่ากับ 1 ก่อน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.27 จงแยกตัวประกอบของ $3x^2 + 24x + 30$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ } 3x^2 + 24x + 30 &= 3(x^2 + 8x + 10) \\
 &= 3\left[x^2 + 2(4)x + (4)^2 + 10 - (4)^2\right] \\
 &= 3\left[(x + 4)^2 + 10 - (4)^2\right] \\
 &= 3\left[(x + 4)^2 + 10 - 16\right] \\
 &= 3\left[(x + 4)^2 - 6\right] \\
 &= 3\left[(x + 4)^2 - 6\right] \\
 &= 3\left[(x + 4)^2 - (\sqrt{6})^2\right] \\
 &= 3\left[\left((x + 4) - \sqrt{6}\right)\left((x + 4) + \sqrt{6}\right)\right] \\
 &= 3\left[(x + 4 - \sqrt{6})(x + 4 + \sqrt{6})\right] \\
 &= 3(x + 4 - \sqrt{6})(x + 4 + \sqrt{6})
 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } 3x^2 + 24x + 30 = 3(x + 4 - \sqrt{6})(x + 4 + \sqrt{6})$$

ตัวอย่าง 2.28 จงแยกตัวประกอบของ $-x^2 + 15x - 40$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ } -x^2 + 15x - 40 &= -(x^2 - 15x + 40) \\
 &= -\left[\left(x^2 + 2\left(\frac{15}{2}\right)x + \left(\frac{15}{2}\right)^2\right) + 40 - \left(\frac{15}{2}\right)^2\right] \\
 &= -\left[\left(x + \frac{15}{2}\right)^2 + 40 - \left(\frac{15}{2}\right)^2\right] \\
 &= -\left[\left(x + \frac{15}{2}\right)^2 + 40 - \frac{225}{4}\right] \\
 &= -\left[\left(x + \frac{15}{2}\right)^2 + \frac{160}{4} - \frac{225}{4}\right] \\
 &= -\left[\left(x + \frac{15}{2}\right)^2 - \frac{65}{4}\right] \\
 &= -\left[\left(x + \frac{15}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{65}}{2}\right)^2\right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \left[\left(x + \frac{15}{2} - \frac{\sqrt{65}}{2} \right) \left(x + \frac{15}{2} + \frac{\sqrt{65}}{2} \right) \right] \\
&= - \left[\left(x + \frac{15 - \sqrt{65}}{2} \right) \left(x + \frac{15 + \sqrt{65}}{2} \right) \right] \\
&= - \left(x + \frac{15 - \sqrt{65}}{2} \right) \left(x + \frac{15 + \sqrt{65}}{2} \right)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $-x^2 + 15x - 40 = - \left(x + \frac{15 - \sqrt{65}}{2} \right) \left(x + \frac{15 + \sqrt{65}}{2} \right)$

ตัวอย่าง 2.29 จงแยกตัวประกอบของ $-3x^2 + 2x + 5$

วิธีทำ $-3x^2 + 2x + 5 = -3 \left(x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} \right)$

$$\begin{aligned}
&= -3 \left[\left(x^2 - \frac{2}{3}x \right) - \frac{5}{3} \right] \\
&= -3 \left[\left(x^2 - 2 \left(\frac{1}{3} \right) x + \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right) - \frac{5}{3} - \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right] \\
&= -3 \left[\left(x - \frac{1}{3} \right)^2 - \frac{5}{3} - \frac{1}{9} \right] \\
&= -3 \left[\left(x - \frac{1}{3} \right)^2 - \frac{15}{9} - \frac{1}{9} \right] \\
&= -3 \left[\left(x - \frac{1}{3} \right)^2 - \frac{16}{9} \right] \\
&= -3 \left[\left(x - \frac{1}{3} \right)^2 - \left(\frac{4}{3} \right)^2 \right] \\
&= -3 \left[\left(\left(x - \frac{1}{3} \right) - \frac{4}{3} \right) \left(\left(x - \frac{1}{3} \right) + \frac{4}{3} \right) \right] \\
&= -3 \left[\left(x - \frac{1}{3} - \frac{4}{3} \right) \left(x - \frac{1}{3} + \frac{4}{3} \right) \right] \\
&= -3 \left[\left(x - \frac{5}{3} \right) (x + 1) \right]
\end{aligned}$$

$$= -3\left(x - \frac{5}{3}\right)(x + 1)$$

$$= \left(5 - \frac{x}{3}\right)(x + 1)$$

ดังนั้น $-3x^2 + 2x + 5 = \left(5 - \frac{x}{3}\right)(x + 1)$

2.2.2 การแยกตัวประกอบพหุนามระดับชั้นสาม

1). การแยกตัวประกอบผลบวกกำลังสามและการแยกตัวประกอบผลต่างกำลังสาม พหุนามระดับชั้นสามบางพหุนามที่มีรูปแบบเฉพาะสามารถแยกตัวประกอบได้ โดยใช้สูตรการแยกตัวประกอบผลบวกกำลังสามและสูตรการแยกตัวประกอบผลต่างกำลังสาม ดังต่อไปนี้ (สุชิน ทำมาหากิน, 2540 : 128)

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

เมื่อ A และ B เป็นค่าคงที่ใด ๆ สำหรับการใช้อนุกรมการแยกตัวประกอบผลบวกกำลังสามและสูตรการแยกตัวประกอบผลต่างกำลังสาม แสดงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.30 จงแยกตัวประกอบของ $x^3 + 64$

วิธีทำ เนื่องจาก $64 = 4^3$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } x^3 + 64 &= x^3 + 4^3 \\ &= (x + 4)(x^2 - 4x + 4^2) \\ &= (x + 4)(x^2 - 4x + 16) \end{aligned}$$

ดังนั้น $x^3 + 64 = (x + 4)(x^2 - 4x + 16)$

ตัวอย่าง 2.31 จงแยกตัวประกอบของ $x^3 - 64$

วิธีทำ เนื่องจาก $64 = 4^3$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } x^3 - 64 &= x^3 - 4^3 \\ &= (x - 4)(x^2 + 4x + 4^2) \\ &= (x - 4)(x^2 + 4x + 16) \end{aligned}$$

ดังนั้น $x^3 - 64 = (x - 4)(x^2 + 4x + 16)$

ตัวอย่าง 2.32 จงแยกตัวประกอบของ $8x^3 + 125$

วิธีทำ เนื่องจาก $125 = 5^3$ และ $8x^3 = (2x)^3$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } 8x^3 + 125 &= (2x)^3 + 5^3 \\ &= (2x + 5) \left[(2x)^2 - (2x)(5) + 5^2 \right] \\ &= (2x + 5)(4x^2 - 10x + 25) \end{aligned}$$

ดังนั้น $8x^3 + 125 = (2x + 5)(4x^2 + 10x + 25)$

ตัวอย่าง 2.33 จงแยกตัวประกอบของ $8x^3 - 125$

วิธีทำ เนื่องจาก $125 = 5^3$ และ $8x^3 = (2x)^3$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } 8x^3 - 125 &= (2x)^3 - 5^3 \\ &= (2x - 5) \left[(2x)^2 + (2x)(5) + 5^2 \right] \\ &= (2x - 5)(4x^2 + 10x + 25) \end{aligned}$$

ดังนั้น $8x^3 - 125 = (2x - 5)(4x^2 + 10x + 25)$

ตัวอย่าง 2.34 จงแยกตัวประกอบของ $(x - 5)^3 - (x + 7)^3$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } (x - 5)^3 - (x + 7)^3 &= [(x - 5) - (x + 7)] \left[(x - 5)^2 + (x - 5)(3x + 7) + (x + 7)^2 \right] \\ &= [(x - 5 - x - 7)] \left[(x - 5)^2 + (x - 5)(x + 7) + (x + 7)^2 \right] \\ &= -12 \left[(x^2 - 10x + 25) + (x^2 + 2x - 35) + (x^2 + 14x + 49) \right] \\ &= -12 \left[(x^2 - 10x + 25) + (x^2 + 2x - 35) + (x^2 + 14x + 49) \right] \\ &= -12 \left[x^2 - 10x + 25 + x^2 + 2x - 35 + x^2 + 14x + 49 \right] \\ &= -12 \left[x^2 + x^2 + x^2 - 10x + 2x + 14x + 25 - 35 + 49 \right] \\ &= -12(3x^2 + 6x + 39) \\ &= -12(3)(x^2 + 2x + 13) \\ &= -36(x^2 + 2x + 13) \end{aligned}$$

ดังนั้น $(x - 5)^3 - (x + 7)^3 = -36(x^2 + 2x + 13)$

ตัวอย่าง 2.35 จงแยกตัวประกอบของ $(x - 5)^3 + (x + 7)^3$

$$\text{วิธีทำ } (x - 5)^3 + (x + 7)^3 = [(x - 5) + (x + 7)] \left[(x - 5)^2 - (x - 5)(3x + 7) + (x + 7)^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
&= [(x-5+x+7)][(x-5)^2 - (x-5)(x+7) + (x+7)^2] \\
&= (2x+2)[(x^2-10x+5^2) - (x^2+2x-35) + (x^2+14x+7^2)] \\
&= (2x+2)[(x^2-10x+25) - (x^2+2x-35) + (x^2+14x+49)] \\
&= (2x+2)[x^2-10x+25-x^2-2x+35+x^2+14x+49] \\
&= (2x+2)[x^2-x^2+x^2-10x-2x+14x+25+35+49] \\
&= (2x+2)(x^2+2x+109) \\
&= 2(x+1)(x^2+2x+109)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $(x-5)^3 + (x+7)^3 = 2(x+1)(x^2+2x+109)$

ตัวอย่าง 2.36 จงแยกตัวประกอบของ $8x^3 - 125$

วิธีทำ เนื่องจาก $125 = 5^3$ และ $8x^3 = (2x)^3$

$$\begin{aligned}
\text{จะได้ } 8x^3 - 125 &= (2x)^3 - 5^3 \\
&= (2x-5)[(2x)^2 + (2x)(5) + 5^2] \\
&= (2x-5)(4x^2 + 10x + 25)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $8x^3 - 125 = (2x-5)(4x^2 + 10x + 25)$

ตัวอย่าง 2.37 จงแยกตัวประกอบของ $8x^3 + 125$

วิธีทำ เนื่องจาก $125 = 5^3$ และ $8x^3 = (2x)^3$

$$\begin{aligned}
\text{จะได้ } 8x^3 + 125 &= (2x)^3 + 5^3 \\
&= (2x+5)[(2x)^2 - (2x)(5) + 5^2] \\
&= (2x+5)(4x^2 - 10x + 25)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $8x^3 + 125 = (2x+5)(4x^2 - 10x + 25)$

ตัวอย่าง 2.38 จงแยกตัวประกอบของ $10\sqrt{10}x^3 - 216$

วิธีทำ เนื่องจาก $216 = 6^3$ และ $10\sqrt{10}x^3 = (\sqrt{10}x)^3$

$$\begin{aligned}
\text{จะได้ } 10\sqrt{10}x^3 - 216 &= (\sqrt{10}x)^3 - 6^3 \\
&= (\sqrt{10}x-6)[(\sqrt{10}x)^2 + (\sqrt{10}x)(6) + 6^2] \\
&= (\sqrt{10}x-6)[(10x)^2 + 6\sqrt{10}x + 36]
\end{aligned}$$

ดังนั้น $10\sqrt{10}x^3 - 216 = (\sqrt{10}x-6)[(10x)^2 + 6\sqrt{10}x + 36]$

ตัวอย่าง 2.39 จงแยกตัวประกอบของ $10\sqrt{10}x^3 + 216$

วิธีทำ เนื่องจาก $216 = 6^3$ และ $10\sqrt{10}x^3 = (\sqrt{10}x)^3$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } 10\sqrt{10}x^3 + 216 &= (\sqrt{10}x)^3 + 6^3 \\ &= (\sqrt{10}x + 6) \left[(\sqrt{10}x)^2 - (\sqrt{10}x)(6) + 6^2 \right] \\ &= (\sqrt{10}x + 6) \left[(10x)^2 - 6\sqrt{10}x + 36 \right] \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } 10\sqrt{10}x^3 + 216 = (\sqrt{10}x + 6) \left[(10x)^2 - 6\sqrt{10}x + 36 \right]$$

2). การแยกตัวประกอบกำลังสามของผลบวก และกำลังสามของผลต่าง สำหรับการแยกตัว

ประกอบพหุนามที่อยู่ในรูปแบบกำลังสามของผลบวก และกำลังสามของผลต่าง ก็เป็นการแยกตัวประกอบที่มีรูปแบบเฉพาะเช่นกัน และสามารถแยกตัวประกอบได้ โดยใช้สูตรการแยกตัวประกอบกำลังสามของผลบวก และกำลังสามของผลต่าง โดยอาศัยจากการแยกตัวประกอบดังต่อไปนี้ (กมล เอกไทยเจริญ, 2552 : 284)

$$\begin{aligned} (A + B)^3 &= (A + B)(A + B)^2 \\ &= (A + B)(A^2 + 2AB + B^2) \\ &= A(A^2 + 2AB + B^2) + B(A^2 + 2AB + B^2) \\ &= A^3 + 2A^2B + AB^2 + A^2B + 2AB^2 + B^3 \\ &= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \end{aligned}$$

ดังนั้น พหุนามระดับขั้นสามที่อยู่ในรูปแบบ $A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$ สามารถแยกตัวประกอบได้ดังนี้

$$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A + B)^3 = (A + B)(A + B)(A + B)$$

เรียก $(A + B)^3$ ว่า กำลังสามของผลบวก

และในทำนองเดียวกันกำลังสามของผลต่างจะได้ว่า

$$\begin{aligned} (A - B)^3 &= (A - B)(A - B)^2 \\ &= (A - B)(A^2 - 2AB + B^2) \\ &= A(A^2 - 2AB + B^2) - B(A^2 - 2AB + B^2) \\ &= A^3 - 2A^2B + AB^2 - A^2B + 2AB^2 - B^3 \\ &= A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 \end{aligned}$$

ดังนั้น พหุนามระดับชั้นสามที่อยู่ในรูปแบบ $A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$ สามารถแยกตัวประกอบได้ดังนี้

$$A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = (A - B)^3 = (A - B)(A - B)(A - B)$$

เรียก $(A - B)^3$ ว่า กำลังสามของผลต่าง

ตัวอย่าง 2.40 จงแยกตัวประกอบของ $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

วิธีทำ เขียนพหุนามที่กำหนดให้ใหม่ ดังนี้

$$\begin{aligned} x^3 + 6x^2 + 12x + 8 &= x^3 + 3(2)x^2 + 3(4)x + 2^3 \\ &= x^3 + 3(2)x^2 + 3x(2^2) + 2^3 \\ &= (x + 2)^3 \\ &= (x + 2)(x + 2)(x + 2) \end{aligned}$$

ดังนั้น $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x + 2)(x + 2)(x + 2)$

ตัวอย่าง 2.41 จงแยกตัวประกอบของ $x^3 + 12x^2 + 48x + 64$

วิธีทำ เขียนพหุนามที่กำหนดให้ใหม่ ดังนี้

$$\begin{aligned} x^3 + 12x^2 + 48x + 64 &= x^3 + 3(4)x^2 + 3(16)x + 4^3 \\ &= x^3 + 3(4)x^2 + 3x(4^2) + 4^3 \\ &= (x + 4)^3 \\ &= (x + 4)(x + 4)(x + 4) \end{aligned}$$

ดังนั้น $x^3 + 12x^2 + 48x + 64 = (x + 4)(x + 4)(x + 4)$

ตัวอย่าง 2.42 จงแยกตัวประกอบของ $27x^3 + 54x^2 + 36x + 8$

วิธีทำ เขียนพหุนามที่กำหนดให้ใหม่ ดังนี้

$$\begin{aligned} 27x^3 + 54x^2 + 36x + 8 &= (3x)^3 + 3(18)x^2 + 3(12)x + 2^3 \\ &= (3x)^3 + 3(2)(9)x^2 + 3(3)(4)x + 2^3 \\ &= (3x)^3 + 3(2)(3^2)x^2 + 3(4)(3x) + 2^3 \\ &= (3x)^3 + 3(2)(3x)^2 + 3(3x)2^3 + 2^3 \\ &= (3x + 2)^3 \\ &= (3x + 2)(3x + 2)(3x + 2) \end{aligned}$$

ดังนั้น $27x^3 + 54x^2 + 36x + 8 = (3x + 2)(3x + 2)(3x + 2)$

ตัวอย่าง 2.43 จงแยกตัวประกอบของ $x^3 + 3\sqrt{2}x^2 + 6x + 2\sqrt{2}$

วิธีทำ เขียนพหุนามที่กำหนดให้ใหม่ ดังนี้

$$\begin{aligned} x^3 + 3\sqrt{2}x^2 + 6x + 2\sqrt{2} &= x^3 + 3\sqrt{2}x^2 + 3(2)x + (\sqrt{2})^3 \\ &= x^3 + 3\sqrt{2}x^2 + 3x(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^3 \\ &= (x + \sqrt{2})^3 \\ &= (x + \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

ดังนั้น $x^3 + 12x^2 + 48x + 64 = (x + \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

ตัวอย่าง 2.44 จงแยกตัวประกอบของ $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

วิธีทำ เขียนพหุนามที่กำหนดให้ใหม่ ดังนี้

$$\begin{aligned} x^3 - 6x^2 + 12x - 8 &= x^3 - 3(2)x^2 + 3(4)x - 2^3 \\ &= x^3 - 3(2)x^2 + 3x(2^2) - 2^3 \\ &= (x - 2)^3 \\ &= (x - 2)(x - 2)(x - 2) \end{aligned}$$

ดังนั้น $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x - 2)(x - 2)(x - 2)$

ตัวอย่าง 2.45 จงแยกตัวประกอบของ $x^3 - 12x^2 + 48x - 64$

วิธีทำ เขียนพหุนามที่กำหนดให้ใหม่ ดังนี้

$$\begin{aligned} x^3 - 12x^2 + 48x - 64 &= x^3 - 3(4)x^2 + 3(16)x - 4^3 \\ &= x^3 - 3(4)x^2 + 3x(4^2) - 4^3 \\ &= (x - 4)^3 \\ &= (x - 4)(x - 4)(x - 4) \end{aligned}$$

ดังนั้น $x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = (x - 4)(x - 4)(x - 4)$

ตัวอย่าง 2.46 จงแยกตัวประกอบของ $27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$

วิธีทำ เขียนพหุนามที่กำหนดให้ใหม่ ดังนี้

$$\begin{aligned} 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8 &= (3x)^3 - 3(18)x^2 + 3(12)x - 2^3 \\ &= (3x)^3 - 3(2)(9)x^2 + 3(3)(4)x - 2^3 \\ &= (3x)^3 - 3(2)(3^2)x^2 + 3(4)(3x) - 2^3 \\ &= (3x)^3 - 3(2)(3x)^2 + 3(3x)2^3 - 2^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (3x - 2)^3 \\
 &= (3x - 2)(3x - 2)(3x - 2)
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $27x^3 - 54x^2 + 36x - 8 = (3x - 2)(3x - 2)(3x - 2)$

ตัวอย่าง 2.47 จงแยกตัวประกอบของ $x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 6x - 2\sqrt{2}$

วิธีทำ เขียนพหุนามที่กำหนดให้ใหม่ ดังนี้

$$\begin{aligned}
 x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 6x - 2\sqrt{2} &= x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 3(2)x - (\sqrt{2})^3 \\
 &= x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 3x(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^3 \\
 &= (x - \sqrt{2})^3 \\
 &= (x - \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x - \sqrt{2})
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = (x - \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$

2.2.2 การแยกตัวประกอบของพหุนามระดับชั้นสูงกว่าสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการแยกตัวประกอบของพหุนามระดับชั้นสูงกว่าสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม โดยได้ตัวประกอบที่เป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มเช่นกัน การแยกตัวประกอบดังกล่าว บางครั้งจำเป็นต้องใช้สูตรการแยกตัวประกอบต่าง ๆ ที่ได้ศึกษามาแล้วในหัวข้อที่ผ่านมา เช่น ผลต่างกำลังสอง การทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ ผลบวกของกำลังสาม ผลต่างของกำลังสาม กำลังสามของผลบวก หรือกำลังสามของผลต่าง ดังตัวอย่างต่อไปนี้ (กมล เอกไทยเจริญ, 2552 : 289-293)

ตัวอย่าง 2.47 จงแยกตัวประกอบของ $x^3 + 12x^2 + 48x + 56$

วิธีทำ เขียนพหุนามที่กำหนดให้ใหม่ ดังนี้

$$\begin{aligned}
 x^3 + 12x^2 + 48x + 56 &= x^3 + 3(4)x^2 + 3(16)x + 56 \\
 &= x^3 + 3(4)x^2 + 3x(4^2) + 4^3 + 56 - 4^3 \\
 &= [x^3 + 3(4)x^2 + 3x(4^2) + 4^3] + 56 - 64 \\
 &= (x + 4)^3 - 8 \\
 &= (x + 4)^3 - 2^3 \\
 &= [(x + 4) - 2][(x + 4)^2 + 2(x + 4) + 2^2]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x+2)\left[(x^2+8x+16)+(2x+8)+4\right] \\
&= (x+2)\left[x^2+8x+16+2x+8+4\right] \\
&= (x+2)(x^2+10x+28)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $x^3 + 12x^2 + 48x + 56 = (x+2)(x^2+10x+28)$

ตัวอย่าง 2.49 จงแยกตัวประกอบของ $8x^3 + 36x^2 + 54x + 91$

วิธีทำ เขียนพหุนามที่กำหนดให้ใหม่ ดังนี้

$$\begin{aligned}
8x^3 + 36x^2 + 54x + 91 &= (2x)^3 + 3(12)x^2 + 3(18)x + 91 \\
&= (2x)^3 + 3(3)(4)x^2 + 3(9)(2)x + 91 \\
&= (2x)^3 + 3(3)(2x)^2 + 3(2x)(3^2) + 3^3 + 91 - 3^3 \\
&= \left[(2x)^3 + 3(3)(2x)^2 + 3(2x)(3^2) + 3^3\right] + 91 - 27 \\
&= (2x+3)^3 + 91 - 27 \\
&= (2x+3)^3 + 64 \\
&= (2x+3)^3 + 4^3 \\
&= \left[(2x+3)+4\right]\left[(2x+3)^2 - 4(2x+3) + 16\right] \\
&= (2x+7)\left[(4x^2+12x+9) - (8x+12) + 16\right] \\
&= (2x+7)(4x^2+12x+9-8x-12+16) \\
&= (2x+7)(4x^2+4x+13)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $8x^3 + 36x^2 + 54x + 91 = (2x+7)(4x^2+4x+13)$

ตัวอย่าง 2.50 จงแยกตัวประกอบของ $81x^4 - 625$

วิธีทำ เขียนพหุนามที่กำหนดให้ใหม่ ดังนี้

$$\begin{aligned}
81x^4 - 625 &= (9x^2)^2 - 25^2 \\
&= (9x^2 - 25)(9x^2 + 25) \\
&= (9x^2 - 5^2)(9x^2 + 25) \\
&= \left[(3x)^2 - 5^2\right](9x^2 + 25) \\
&= \left[(3x-5)(3x+5)\right](9x^2 + 25) \\
&= (3x-5)(3x+5)(9x^2 + 25)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $81x^4 - 625 = (3x-5)(3x+5)(9x^2+25)$

ตัวอย่าง 2.51 จงแยกตัวประกอบของ $x^4 + 324$

วิธีทำ เขียนพหุนามที่กำหนดให้ใหม่ ดังนี้

$$\begin{aligned}
 x^4 + 324 &= (x^2)^2 + 18^2 \\
 &= \left[(x^2)^2 + 2(18)x^2 + 18^2 \right] - 2(18)x^2 \\
 &= (x^2 + 18)^2 - 2(18)x^2 \\
 &= (x^2 + 18)^2 - 36x^2 \\
 &= (x^2 + 18)^2 - (6x)^2 \\
 &= \left[(x^2 + 18) - 6x \right] \left[(x^2 + 18) + 6x \right] \\
 &= (x^2 - 6x + 18)(x^2 + 6x + 18)
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x^4 + 324 = (x^2 - 6x + 18)(x^2 + 6x + 18)$

ตัวอย่าง 2.52 จงแยกตัวประกอบของ $x^6 - 729$

วิธีทำ เขียนพหุนามที่กำหนดให้ใหม่ ดังนี้

$$\begin{aligned}
 x^6 - 729 &= (x^3)^2 - (3^3)^2 \\
 &= (x^3 - 3^3)(x^3 + 3^3) \\
 &= \left[(x - 3)(x^2 + 6x + 9) \right] \left[(x + 3)(x^2 - 6x + 9) \right] \\
 &= (x - 3)(x + 3)(x^2 + 3x + 9)(x^2 - 3x + 9)
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x^6 - 729 = (x - 3)(x + 3)(x^2 + 3x + 9)(x^2 - 3x + 9)$

การแยกตัวประกอบพหุนามระดับขึ้นสองกว่าสองบางพหุนามสามารถทำได้โดยใช้สมบัติการเปลี่ยนหมู่ สมบัติการสลับที่ และสมบัติการแจกแจง รวมถึงการใช้สูตรการแยกตัวประกอบที่กล่าวไปแล้ว เช่น ผลต่างของกำลังสอง ผลบวกของกำลังสาม และผลต่างของกำลังสาม ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.53 จงแยกตัวประกอบของ $x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 12x$

วิธีทำ เขียนพหุนามที่กำหนดให้ใหม่ ดังนี้

$$\begin{aligned}
 x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 12x &= (x^4 - 3x^3) - (4x^2 - 12x) \\
 &= x^3(x - 3) - 4x(x - 3) \\
 &= (x^3 - 4x)(x - 3) \\
 &= x(x^2 - 2^2)(x - 3) \\
 &= x(x - 2)(x + 2)(x - 3)
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 12x = x(x - 2)(x + 2)(x - 3)$

ตัวอย่าง 2.54 จงแยกตัวประกอบของ $x^3 - 6x^2 + 18x - 27$

วิธีทำ เขียนพหุนามที่กำหนดให้ใหม่ ดังนี้

$$\begin{aligned}
 x^3 - 6x^2 + 18x - 27 &= x^3 - 27 - 6x^2 + 18x \\
 &= (x^3 - 27) - (6x^2 - 18x) \\
 &= (x^3 - 3^3) - (6x^2 - 18x) \\
 &= (x - 3)(x^2 + 3x + 9) - 6x(x - 3) \\
 &= (x - 3)[(x^2 + 3x + 9) - 6x] \\
 &= (x - 3)(x^2 + 3x + 9 - 6x) \\
 &= (x - 3)(x^2 - 3x + 9)
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x^3 - 6x^2 + 18x - 27 = (x - 3)(x^2 - 3x + 9)$

ตัวอย่าง 2.55 จงแยกตัวประกอบของ $x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 8x$

วิธีทำ เขียนพหุนามที่กำหนดให้ใหม่ ดังนี้

$$\begin{aligned}
 x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 8x &= x(x^3 - 5x^2 - 10x + 8) \\
 &= x[(x^3 + 8) - (5x^2 + 10x)] \\
 &= x[(x^3 + 8) - 5x(x + 2)] \\
 &= x[(x^3 + 2^3) - 5x(x + 2)] \\
 &= x[(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - 5x(x + 2)] \\
 &= x(x + 2)[(x^2 - 2x + 4) - 5x] \\
 &= x(x + 2)(x^2 - 2x + 4 - 5x) \\
 &= x(x + 2)(x^2 - 7x + 4)
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 8x = x(x + 2)(x^2 - 7x + 4)$

2.2.3 การแยกตัวประกอบของพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มโดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ

สำหรับการแยกตัวประกอบพหุนามที่ใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือนั้นเนื้อหาที่จะกล่าวในเอกสารฉบับนี้นั้น คือพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์ของทุกพจน์เป็นจำนวนเต็ม และตัวประกอบที่ได้จะเป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์ของทุกพจน์เป็นจำนวนเต็มด้วยเช่นกัน ดังนั้นก่อนที่จะเราไปศึกษาการแยกตัวประกอบของพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มโดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือนั้นจะขอกล่าวถึงทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องดังต่อไปนี้ (รณชัย มาเจริญทรัพย์, 2551 : 135)

ทฤษฎีบท 2.1 (ทฤษฎีบทเศษเหลือ)

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ เป็นพหุนามที่ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ $a_0, a_1, \dots, a_n$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $a_n \neq 0$ ถ้าหารพหุนาม $P(x)$ ด้วย $x - c$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริง จะเหลือเศษเท่ากับ $P(c)$

ทฤษฎีบท 2.2 (ทฤษฎีบทตัวประกอบ)

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ เป็นพหุนามที่ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ $a_0, a_1, \dots, a_n$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง $a_n \neq 0$ พหุนาม $P(x)$ จะมี $x - c$ เป็นตัวประกอบก็ต่อเมื่อ $P(c) = 0$

ต่อไปนี้จะป็นตัวอย่างจากทฤษฎีบท 2.1 ทฤษฎีบทเศษเหลือและทฤษฎีบท 2.2 ทฤษฎีบทตัวประกอบ เพื่อให้ผู้ศึกษาได้เข้าใจมากยิ่งขึ้นดังต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.56 กำหนดพหุนาม $P(x) = x^2 + 3x - 1$ พิจารณาเศษเหลือที่ได้จากการหารด้วย $x - 2$ ดังต่อไปนี้

$$\begin{array}{r}
 x + 5 \\
 x - 2 \overline{) x^2 + 3x - 1} \\
 \underline{x^2 - 2x} \\
 5x - 1 \\
 \underline{5x - 10} \\
 9
 \end{array}$$

จากการตั้งหารพหุนามจะเห็นว่า 9 เป็นเศษจากการหาร $x^2 + 3x - 1$ ด้วย $x - 2$ แต่ถ้าใช้ทฤษฎีบท 2.1 สามารถทำได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 \text{จาก } P(x) &= x^2 + 3x - 1 \\
 P(2) &= 2^2 + 3(2) - 1 \\
 &= 4 + 6 - 1 \\
 &= 9
 \end{aligned}$$

นั่นคือ $P(2) = 9$

ดังนั้น 9 เป็นเศษจากการหาร $x^2 + 3x - 1$ ด้วย $x - 2$

ตัวอย่าง 2.57 กำหนดพหุนาม $P(x) = x^2 + 2x - 15$ พิจารณาเศษเหลือที่ได้จากการหารด้วย $x - 3$ ดังต่อไปนี้

$$\begin{array}{r}
 x + 5 \\
 x - 3 \overline{) x^2 + 2x - 15} \\
 \underline{x^2 - 3x} \\
 5x - 15 \\
 \underline{5x - 15} \\
 0
 \end{array}$$

จากการตั้งหารพหุนามจะเห็นว่า 0 เป็นเศษจากการหาร $x^2 + 2x - 15$ ด้วย $x - 3$ แต่ถ้าใช้ทฤษฎีบท 2.1 สามารถทำได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 \text{จาก } P(x) &= x^2 + 2x - 15 \\
 P(3) &= 3^2 + 2(3) - 15 \\
 &= 9 + 6 - 15 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

นั่นคือ $P(3) = 0$

จากทฤษฎีบท 2.2 ทำให้ได้ว่า $x - 3$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $x^2 + 2x - 15$

ตัวอย่าง 2.58 จงแสดงว่าพหุนาม $x + 2$ เป็นตัวประกอบของพหุนาม

$$P(x) = x^3 + 3x^2 - 10x - 24 \text{ หรือไม่}$$

วิธีทำ เนื่องจาก $x + 2 = x - (-2)$

$$\text{และ } P(x) = x^3 + 3x^2 - 10x - 24$$

$$\begin{aligned}
 \text{พิจารณา } P(-2) &= (-2)^3 + 3(-2)^2 - 10(-2) - 24 \\
 &= -8 + 12 + 20 - 24 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

นั่นคือ $P(-2) = 0$

ดังนั้น $x + 2$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของพหุนาม $P(x) = x^3 + 3x^2 - 10x - 24$

ตัวอย่าง 2.59 จงแสดงว่าพหุนาม $x + 3$ เป็นตัวประกอบของพหุนาม

$$P(x) = x^3 + 3x^2 - 10x - 24 \text{ หรือไม่}$$

วิธีทำ ตรวจสอบ $x + 3$

$$\text{จาก } P(x) = x^3 + 3x^2 - 10x - 24$$

$$\text{พิจารณา } P(-3) = (-3)^3 + 3(-3)^2 - 10(-3) - 24$$

$$\begin{aligned}
 P(-3) &= (-3)^3 + 3(-3)^2 - 10(-3) - 24 \\
 &= -27 + 27 + 30 - 24 \\
 &= 6
 \end{aligned}$$

นั่นคือ $P(-3) \neq 0$

ดังนั้น $x + 3$ ไม่เป็นตัวประกอบของพหุนาม $P(x) = x^3 + 3x^2 - 10x - 24$

เมื่อเข้าใจทฤษฎีบทเศษเหลือและทฤษฎีบทแยกตัวประกอบแล้วเราสามารถนำทั้งสองทฤษฎีบทมาช่วยในการแยกตัวประกอบได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.60 จงใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ แยกตัวประกอบของ $x^3 - 5x^2 - 2x + 24$

วิธีทำ ให้ $P(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$

จะได้
$$\begin{aligned}
 P(-2) &= (-2)^3 - 5(-2)^2 - 2(-2) + 24 \\
 &= -8 - 5(4) + 4 + 24 \\
 &= -8 - 20 + 4 + 24 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $P(-2) = 0$ นั่นคือ $x - (-2) = x + 2$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $P(x)$ นำ $x + 2$ ไปหาร $P(x)$ โดยการตั้งหาร จะได้ว่า

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 7x + 12 \\
 x + 2 \overline{) x^3 - 5x^2 - 2x + 24} \\
 \underline{x^3 + 2x^2} \\
 -7x^2 - 2x \\
 \underline{-7x^2 - 14x} \\
 12x + 24 \\
 \underline{12x + 24} \\
 0
 \end{array}$$

จากการตั้งหารจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 P(x) &= (x + 2)(x^2 - 7x + 12) \\
 &= (x + 2)(x - 3)(x - 4)
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = (x + 2)(x - 3)(x - 4)$

ตัวอย่าง 2.61 จงใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ แยกตัวประกอบของ $x^3 - 19x - 30$

วิธีทำ ให้ $P(x) = x^3 - 19x - 30$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } P(-2) &= (-2)^3 - 19(-2) - 30 \\ &= -8 + 38 - 30 \\ &= 0\end{aligned}$$

เนื่องจาก $P(-2) = 0$ นั่นคือ $x - (-2) = x + 2$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $P(x)$ นำ $x + 2$ ไปหาร $P(x)$ โดยการตั้งหาร จะได้ว่า

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x - 15 \\ x + 2 \overline{) x^3 - 0x^2 - 19x - 30} \\ \underline{x^3 + 2x^2} \\ -2x^2 - 19x \\ \underline{-2x^2 - 4x} \\ -15x - 30 \\ \underline{-15x - 30} \\ 0 \end{array}$$

จากการตั้งหารจะได้ว่า

$$\begin{aligned}P(x) &= (x + 2)(x^2 - 2x - 15) \\ &= (x + 2)(x + 3)(x - 5)\end{aligned}$$

ดังนั้น $x^3 - 19x - 30 = (x + 2)(x + 3)(x - 5)$

จากตัวอย่างการแยกตัวประกอบพหุนามโดยทฤษฎีบทเศษเหลือนี้ การจะหาค่า a ที่ทำให้ $P(a) = 0$ นั้นไม่ง่าย โดยเราต้องใช้การสุ่มหาค่าไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะได้แต่บางครั้งเราไม่สามารถรู้ได้เลยว่าจะมีค่า a ที่ทำให้ $P(a)$ เป็นศูนย์หรือไม่ดังนั้นจึงต้องอาศัยทฤษฎีบทดังนี้

ทฤษฎีบท 2.3

กำหนด $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ เป็นพหุนามที่ n เป็นจำนวนเต็มบวกและ $a_0, a_1, \dots, a_n$ เป็นจำนวนเต็ม ถ้า r เป็นจำนวนเต็มที่ทำให้ $P(r) = 0$ แล้ว r จะหาร a_0 ลงตัว

จากทฤษฎีบท 2.3 ทำให้เราสามารถหาค่าของจำนวนเต็ม a ซึ่งอาจทำให้ $P(a) = 0$ ได้แค่บางค่า กล่าวคือ ให้พิจารณาเฉพาะจำนวนเต็มที่หารพจน์ค่าคงตัวของ $P(x)$ ลงตัวเท่านั้น ตัวอย่างเช่น

$$\text{กำหนด } P(x) = x^3 + 4x^2 - 11x + 6$$

$$\text{จำนวนเต็มที่หารค่าคงตัว 6 ได้แก่ } 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$$

ดังนั้นจำนวนเต็ม a ที่อาจจะทำให้ $P(a) = 0$ ให้พิจารณาจากจำนวนเต็มแปดจำนวนดังกล่าวซึ่งตรวจสอบได้ดังต่อไปนี้

$$P(1) = 0 \qquad P(-1) = 200$$

$$P(2) = 8 \qquad P(-2) = 36$$

$$P(3) = 36 \qquad P(-3) = 48$$

$$P(6) = 300 \qquad P(-6) = 0$$

จะเห็นว่า จำนวน a ที่ทำให้ $P(a) = 0$ มีสองจำนวนคือ 1 และ -6 และประโยชน์อีกอย่างหนึ่งของทฤษฎีบทเศษเหลือ คือ การแสดงว่าพหุนามบางพหุนามไม่สามารถแยกตัวประกอบออกเป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มได้ ตัวอย่างเช่น

$$P(x) = x^2 - 2x - 1$$

จำนวนที่หาร 1 ลงตัวได้แก่ 1 และ -1

จากการนำจำนวนเต็มเหล่านี้ไปแทน x ใน $P(x)$ จะได้ว่า

$$P(1) = 1^2 - 2(1) - 1 = -2 \neq 0$$

$$P(-1) = (-1)^2 - 2(-1) - 1 = 2 \neq 0$$

แสดงว่า $x^2 - 2x - 1$ ไม่สามารถแยกตัวประกอบเป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มได้

ตัวอย่าง 2.62 จงใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือแยกตัวประกอบของ $x^4 - 5x^3 - 17x^2 + 129x - 180$

วิธีทำ ให้ $P(x) = x^4 - 5x^3 - 17x^2 + 129x - 180$

$$\text{จะได้ } P(3) = (3)^4 - 5(3)^3 - 17(3)^2 + 129(3) - 180 = 0$$

เนื่องจาก $P(3) = 0$ นั่นคือ $x - 3$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $P(x)$

นำ $x - 3$ ไปหาร $P(x)$ โดยการตั้งหาร จะได้ว่า

$$P(x) = (x - 3)(x^3 - 2x^2 - 23x + 60)$$

$$\text{ให้ } Q(x) = x^3 - 2x^2 - 23x + 60$$

$$\text{จะได้ } Q(3) = (3)^3 - 2(3)^2 - 23(3) + 60 = 0$$

เนื่องจาก $Q(3) = 0$ นั่นคือ $x - 3$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $Q(x)$

นำ $x - 3$ ไปหาร $Q(x)$ โดยการตั้งหาร จะได้ว่า

$$Q(x) = (x - 3)(x^2 - x - 20)$$

จะได้ว่า $P(x) = (x - 3)(x - 3)(x^2 - x - 20) = (x - 3)(x - 3)(x - 5)(x + 4)$

ดังนั้น $x^4 - 5x^3 - 17x^2 + 129x - 180 = (x - 3)(x - 3)(x - 5)(x + 4)$

ตัวอย่าง 2.63 จงใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือแยกตัวประกอบของ $x^5 + 3x^4 - 11x^3 - 27x^2 + 10x + 24$

วิธีทำ ให้ $P(x) = x^5 + 3x^4 - 11x^3 - 27x^2 + 10x + 24$

จะได้ $P(1) = 1^5 + 3(1)^4 - 11(1)^3 - 27(1)^2 + 10(1) + 24 = 0$

เนื่องจาก $P(1) = 0$ นั่นคือ $x - 1$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $P(x)$

นำ $x - 1$ ไปหาร $P(x)$ โดยการตั้งหาร จะได้ว่า

$$P(x) = (x - 1)(x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 34x - 24)$$

ให้ $Q(x) = x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 34x - 24$

จะได้ $Q(-1) = (-1)^4 + 4(-1)^3 - 7(-1)^2 - 34(-1) - 24 = 0$

เนื่องจาก $Q(-1) = 0$ นั่นคือ $x - (-1) = x + 1$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $Q(x)$

นำ $x + 1$ ไปหาร $Q(x)$ โดยการตั้งหาร จะได้ว่า

$$Q(x) = (x + 1)(x^3 + 3x^2 - 10x - 24)$$

ให้ $R(x) = x^3 + 3x^2 - 10x - 24$

จะได้ $R(3) = 3^3 + 3(3)^2 - 10(3) - 24 = 0$

เนื่องจาก $R(3) = 0$ นั่นคือ $x - 3$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $R(x)$

นำ $x - 3$ ไปหาร $R(x)$ โดยการตั้งหาร จะได้ว่า

$$R(x) = (x - 3)(x^2 + 6x + 8)$$

จาก $P(x) = (x - 1)Q(x)$

และ $Q(x) = (x + 1)R(x)$

$$R(x) = (x - 3)(x^2 + 6x + 8)$$

จะได้ว่า $P(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 3)(x^2 + 6x + 8)$

$$= (x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 4)(x + 2)$$

ดังนั้น $x^5 + 3x^4 - 11x^3 - 27x^2 + 10x + 24 = (x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 4)(x + 2)$

2.3 สมการและอสมการ

สำหรับเรื่องการแก้สมการและอสมการหนึ่งตัวแปรนั้นในตำราฉบับนี้ไม่ได้กล่าวถึงการหาผลเฉลยของสมการกำลังหนึ่งแต่กล่าวเฉพาะการหาผลเฉลยของอสมการกำลังหนึ่งเท่านั้น และการหาผลเฉลยของสมการและอสมการกำลังสองขึ้นไปนั้นถ้าผู้เรียนศึกษาการแยกตัวประกอบเป็นอย่างดีแล้วก็ไม่ใช่เรื่องยากที่จะสามารถหาผลเฉลยของสมการและอสมการได้

2.3.1 การแก้สมการตัวแปรเดียว

สำหรับการแก้สมการ $P(x) = 0$ เมื่อ $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ โดยที่ $a_0, a_1, \dots, a_n$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก สำหรับกรณีที่ $n = 1$ จะได้สมการ $ax + b = 0$ และสมการดังกล่าวมี $-\frac{b}{a}$ เป็นผลเฉลย แต่สำหรับกรณีที่ $n = 2$ จะได้สมการ $ax^2 + bx + c = 0$ และ

ถ้า $b^2 - 4ac > 0$ จะได้คำตอบของสมการเป็นจำนวนจริงคือ

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{และ} \quad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ถ้า $b^2 - 4ac = 0$ จะได้คำตอบของสมการเป็นจำนวนจริง $-\frac{b}{2a}$ แต่ในกรณี $b^2 - 4ac < 0$

จะได้ผลเฉลยเป็นจำนวนเชิงซ้อน และสำหรับการแก้สมการ $P(x) = 0$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ หรืออาจจะใช้การแยกตัวประกอบของพหุนามที่ได้ศึกษาในหัวข้อที่ผ่านมาแล้วใช้ ทฤษฎีบท 1.12 ที่ได้ศึกษาผ่านมาแล้วเช่นกันช่วยในการหาผลเฉลยดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.64 จงหาคำตอบที่เป็นจำนวนจริงของสมการ $x^2 - 3x - 10 = 0$

วิธีทำ จาก $x^2 - 3x - 10 = 0$

จะได้ $(x - 5)(x + 2) = 0$

นั่นคือ $x - 5 = 0$ หรือ $x + 2 = 0$

$x = 5$ หรือ $x = -2$

ดังนั้น คำตอบของสมการ $x^2 - 3x - 10 = 0$ คือ 2 หรือ 5

ตัวอย่าง 2.65 จงหาคำตอบที่เป็นจำนวนจริงของสมการ $8x^2 + 14x + 3 = 0$

วิธีทำ จาก $8x^2 + 14x + 3 = 0$

จะได้ $(2x + 3)(4x + 1) = 0$

นั่นคือ $2x + 3 = 0$ หรือ $4x + 1 = 0$

$x = -\frac{3}{2}$ หรือ $x = -\frac{1}{4}$

ดังนั้น คำตอบของสมการ $8x^2 + 14x + 3 = 0$ คือ $-\frac{3}{2}$ หรือ $-\frac{1}{4}$

ตัวอย่าง 2.66 จงหาคำตอบที่เป็นจำนวนจริงของสมการ $-12x^2 + x + 6 = 0$

วิธีทำ จาก $-12x^2 + x + 6 = 0$

$$\text{จะได้ } -(4x - 3)(3x + 2) = 0$$

$$(4x - 3)(3x + 2) = 0$$

$$\text{นั่นคือ } (4x - 3) = 0 \quad \text{หรือ} \quad 3x + 2 = 0$$

$$x = \frac{3}{4} \quad \text{หรือ} \quad x = -\frac{2}{3}$$

ดังนั้น คำตอบของสมการ $-12x^2 + x + 6 = 0$ คือ $\frac{3}{4}$ หรือ $-\frac{2}{3}$

ตัวอย่าง 2.67 จงหาคำตอบที่เป็นจำนวนจริงของสมการ $x^2 - 2 = 0$

วิธีทำ จาก $x^2 - 2 = 0$

$$\text{จะได้ } (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$$

$$\text{นั่นคือ } (x - \sqrt{2}) = 0 \quad \text{หรือ} \quad (x + \sqrt{2}) = 0$$

$$x = \sqrt{2} \quad \text{หรือ} \quad x = -\sqrt{2}$$

ดังนั้น คำตอบของสมการ $x^2 - 2 = 0$ คือ $\sqrt{2}$ หรือ $-\sqrt{2}$

ตัวอย่าง 2.68 จงหาคำตอบที่เป็นจำนวนจริงของสมการ $3x^2 - 7 = 0$

วิธีทำ จาก $3x^2 - 7 = 0$

$$\text{จะได้ } (\sqrt{3}x - \sqrt{7})(\sqrt{3}x + \sqrt{7}) = 0$$

$$\text{นั่นคือ } (\sqrt{3}x - \sqrt{7}) = 0 \quad \text{หรือ} \quad (\sqrt{3}x + \sqrt{7}) = 0$$

$$x = \sqrt{\frac{7}{3}} \quad \text{หรือ} \quad x = -\sqrt{\frac{7}{3}}$$

ดังนั้น คำตอบของสมการ $3x^2 - 7 = 0$ คือ $\sqrt{\frac{7}{3}}$ หรือ $-\sqrt{\frac{7}{3}}$

ตัวอย่าง 2.69 จงหาคำตอบที่เป็นจำนวนจริงของสมการ $x^2 + 8x + 10 = 0$

วิธีทำ

$$x^2 + 8x + 10 = 0$$

$$(x^2 + 8x) + 10 = 0$$

$$\left((x^2 + 2(4)x + 4^2)\right) + 10 - 4^2 = 0$$

$$(x + 4)^2 - 6 = 0$$

$$(x + 4 - \sqrt{6})(x + 4 + \sqrt{6}) = 0$$

นั่นคือ $(x + 4 - \sqrt{6}) = 0$ หรือ $(x + 4 + \sqrt{6}) = 0$

$$x = \sqrt{6} - 4 \quad \text{หรือ} \quad x = -\sqrt{6} - 4$$

ดังนั้น คำตอบของสมการ $x^2 + 8x + 10 = 0$ คือ $\sqrt{6} - 4$ หรือ $-\sqrt{6} - 4$

ตัวอย่าง 2.70 จงหาคำตอบที่เป็นจำนวนจริงของสมการ $x^3 + 64 = 0$

วิธีทำ

$$x^3 + 64 = 0$$

$$(x + 4)(x^2 - 4x + 4^2) = 0$$

$$(x + 4)(x^2 - 4x + 16) = 0$$

นั่นคือ $x + 4 = 0$ หรือ $x^2 - 4x + 16 = 0$

$$x = -4 \quad \text{หรือ} \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(16)}}{2}$$

$$\text{เนื่องจาก } 16 - 4(16) < 0$$

จึงทำให้ค่าของ x ที่ได้เป็นจำนวนเชิงซ้อน

ดังนั้น คำตอบที่เป็นจำนวนจริงของสมการของสมการ $x^3 + 64 = 0$ คือ -4

ตัวอย่าง 2.71 จงหาคำตอบที่เป็นจำนวนจริงของสมการ $(x - 5)^3 + (x + 7)^3 = 0$

วิธีทำ

$$(x - 5)^3 + (x + 7)^3 = 0$$

$$\left[(x - 5) + (x + 7)\right] \left[(x - 5)^2 - (x - 5)(x + 7) + (x + 7)^2\right] = 0$$

$$\left[(x - 5 + x + 7)\right] \left[(x - 5)^2 - (x - 5)(x + 7) + (x + 7)^2\right] = 0$$

$$(2x + 2) \left[(x^2 - 10x + 25) - (x^2 + 2x - 35) + (x^2 + 14x + 49)\right] = 0$$

$$(2x + 2) \left[x^2 - 10x + 25 - x^2 - 2x + 35 + x^2 + 14x + 49\right] = 0$$

$$(2x + 2) \left[x^2 - x^2 + x^2 - 10x - 2x + 14x + 25 + 35 + 49\right] = 0$$

$$(2x + 2)(x^2 + 2x + 109) = 0$$

$$2(x + 1)(x^2 + 2x + 109) = 0$$

$$(x + 1)(x^2 + 2x + 109) = 0$$

นั่นคือ $x + 1 = 0$

หรือ $x^2 + 2x + 109 = 0$

$$x = -1$$

หรือ

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(109)}}{2}$$

เนื่องจาก $4 - 4(109) < 0$

จึงทำให้ค่าของ x ที่ได้เป็นจำนวนเชิงซ้อน

ดังนั้น คำตอบที่เป็นจำนวนจริงของสมการของสมการ $(x - 5)^3 + (x + 7)^3 = 0$ คือ -1

ตัวอย่าง 2.72 จงหาคำตอบที่เป็นจำนวนจริงของสมการ $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$

วิธีทำ

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$$

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$$

$$x^3 + 3(2)x^2 + 3(4)x + 2^3 = 0$$

$$x^3 + 3(2)x^2 + 3x(2^2) + 2^3 = 0$$

$$(x + 2)^3 = 0$$

$$(x + 2)(x + 2)(x + 2) = 0$$

นั่นคือ $x + 2 = 0$

$$x = -2$$

ดังนั้น คำตอบที่เป็นจำนวนจริงของสมการของสมการ $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$ คือ -2

ตัวอย่าง 2.73 จงหาคำตอบที่เป็นจำนวนจริงของสมการ $8x^3 + 36x^2 + 54x + 91 = 0$

วิธีทำ

$$8x^3 + 36x^2 + 54x + 91 = 0$$

$$8x^3 + 36x^2 + 54x + 91 = 0$$

$$(2x)^3 + 3(12)x^2 + 3(18)x + 91 = 0$$

$$(2x)^3 + 3(3)(4)x^2 + 3(9)(2)x + 91 = 0$$

$$(2x)^3 + 3(3)(2x)^2 + 3(2x)(3^2) + 3^3 + 91 - 3^3 = 0$$

$$\left[(2x)^3 + 3(3)(2x)^2 + 3(2x)(3^2) + 3^3\right] + 91 - 27 = 0$$

$$(2x + 3)^3 + 91 - 27 = 0$$

$$(2x + 3)^3 + 64 = 0$$

$$(2x + 3)^3 + 4^3 = 0$$

$$\left[(2x + 3) + 4\right]\left[(2x + 3)^2 - 4(2x + 3) + 16\right] = 0$$

$$(2x + 7)\left[(4x^2 + 12x + 9) - (8x + 12) + 16\right] = 0$$

$$(2x + 7)(4x^2 + 12x + 9 - 8x - 12 + 16) = 0$$

$$(2x + 7)(4x^2 + 4x + 13) = 0$$

นั่นคือ $2x + 7 = 0$

หรือ $4x^2 + 4x + 13 = 0$

$$x = -\frac{7}{2}$$

หรือ $x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(4)(13)}}{8}$

เนื่องจาก $16 - 4(4)(13) < 0$

จึงทำให้ค่าของ x ที่ได้เป็นจำนวนเชิงซ้อน

ดังนั้น คำตอบที่เป็นจำนวนจริงของสมการของสมการ $8x^3 + 36x^2 + 54x + 91 = 0$ คือ $-\frac{7}{2}$

ตัวอย่าง 2.74 จงหาคำตอบที่เป็นจำนวนจริงของสมการ $81x^4 - 625 = 0$

วิธีทำ

$$81x^4 - 625 = 0$$

$$(9x^2)^2 - 25^2 = 0$$

$$(9x^2 - 25)(9x^2 + 25) = 0$$

$$(9x^2 - 5^2)(9x^2 + 25) = 0$$

$$\left[(3x)^2 - 5^2\right](9x^2 + 25) = 0$$

$$\left[(3x - 5)(3x + 5)\right](9x^2 + 25) = 0$$

$$(3x - 5)(3x + 5)(9x^2 + 25) = 0$$

นั่นคือ $3x + 5 = 0$ หรือ $3x - 5 = 0$ หรือ $9x^2 + 25 = 0$

$$x = -\frac{5}{3} \quad \text{หรือ} \quad x = \frac{5}{3} \quad \text{หรือ} \quad x = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4(9)(25)}}{18}$$

เนื่องจาก $0 - 4(9)(25) < 0$

จึงทำให้ค่าของ x ที่ได้เป็นจำนวนเชิงซ้อน

ดังนั้น คำตอบที่เป็นจำนวนจริงของสมการของสมการ $81x^4 - 625 = 0$ คือ $-\frac{5}{3}$ หรือ $\frac{5}{3}$

ตัวอย่าง 2.75 จงหาคำตอบที่เป็นจำนวนจริงของสมการ $x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 12x = 0$

วิธีทำ $x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 12x = 0$

$$(x^4 - 3x^3) - (4x^2 - 12x) = 0$$

$$x^3(x - 3) - 4x(x - 3) = 0$$

$$(x^3 - 4x)(x - 3) = 0$$

$$x(x^2 - 4)(x - 3) = 0$$

$$x(x^2 - 2^2)(x - 3) = 0$$

$$x(x - 2)(x + 2)(x - 3) = 0$$

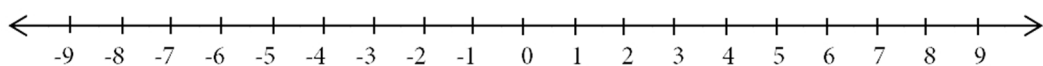
$$\text{นั่นคือ } x = 0 \quad \text{หรือ } x - 2 = 0 \quad \text{หรือ } x + 2 = 0 \quad \text{หรือ } x - 3 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{หรือ } x = 2 \quad \text{หรือ } x = -2 \quad \text{หรือ } x = 3$$

ดังนั้น คำตอบที่เป็นจำนวนจริงของสมการของสมการ $x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 12x = 0$ คือ 0 หรือ 2 หรือ -2 หรือ 3

2.3.2 ช่วงและการแก้อสมการ

ถ้าลากเส้นตรงเส้นหนึ่งแล้วเลือกจุดจุดหนึ่ง เรียกว่าจุด 0 ให้จุดนี้แทนจำนวนศูนย์เลือกหน่วยความยาวให้จุดทางขวาของ 0 อยู่ห่างจาก 0 เป็นระยะ 1, 2, 3, ... หน่วยแทนจำนวน 1, 2, 3, ... ตามลำดับ และให้จุดทางซ้ายของ 0 อยู่ห่างจาก 0 เป็นระยะ 1, 2, 3, ... หน่วยแทนจำนวน -1, -2, -3, ... ตามลำดับ (จาร์ส อินสม และประทีป โรจนวิภาต, 2550 : 1-2)



ภาพประกอบ 2.1 แสดงเส้นจำนวนจริง

ที่มา : ปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร. 2547 : 199

นักคณิตศาสตร์ถือว่า จำนวนจริงทุกจำนวนจะมีจุดบนเส้นตรงนี้จับคู่ด้วยเพียงจุดเดียว และในทางตรงกันข้ามทุกจุดบนเส้นตรงนี้จะจับคู่กับจำนวนจริงเพียงจำนวนเดียว และเรียกเส้นตรงในภาพประกอบ 2.1 ว่า **เส้นจำนวนจริง**

บทนิยาม 1.18

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงซึ่ง $a < b$ เขียนสัญลักษณ์ต่อไปนี้แทนสับเซตของ R

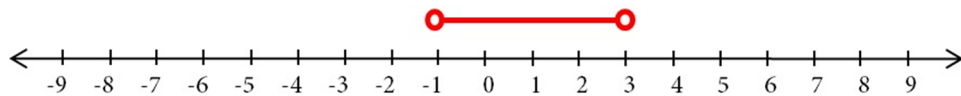
ช่วงเปิด (a, b)	หมายถึง	$\{x : a < x < b\}$
ช่วงปิด $[a, b]$	หมายถึง	$\{x : a \leq x \leq b\}$
ช่วงครึ่งเปิด $(a, b]$	หมายถึง	$\{x : a < x \leq b\}$
ช่วงครึ่งปิด $[a, b)$	หมายถึง	$\{x : a \leq x < b\}$
ช่วง (a, ∞)	หมายถึง	$\{x : x > a\}$
ช่วง $[a, \infty)$	หมายถึง	$\{x : x \geq a\}$

บทนิยาม 1.18 (ต่อ)

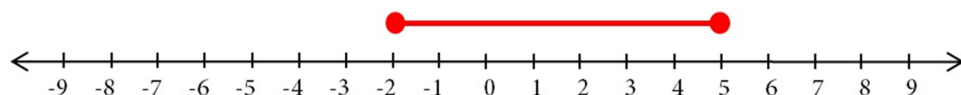
ช่วง $(-\infty, a)$	หมายถึง	$\{x : x < a\}$
ช่วง $(-\infty, a]$	หมายถึง	$\{x : x \leq a\}$
ช่วง $(-\infty, \infty)$	หมายถึง	เซตของจำนวนจริง

ตัวอย่างการเขียนกราฟบนเส้นจำนวนจริงแทนช่วง

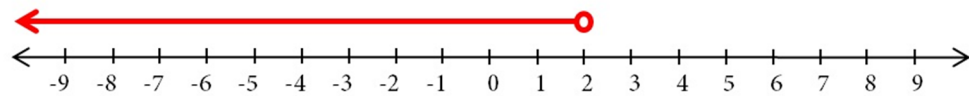
กราฟของช่วง $(-1, 3)$ คือ



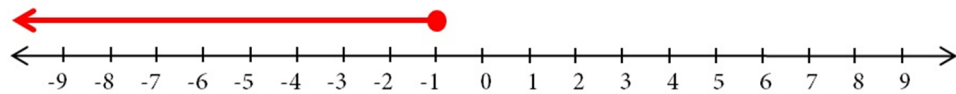
กราฟของช่วง $[-2, 5]$ คือ



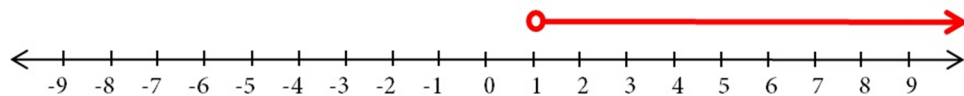
กราฟของช่วง $(-\infty, 2)$ คือ



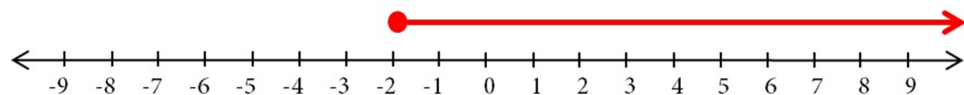
กราฟของช่วง $(-\infty, -1]$ คือ



กราฟของช่วง $(1, \infty)$ คือ



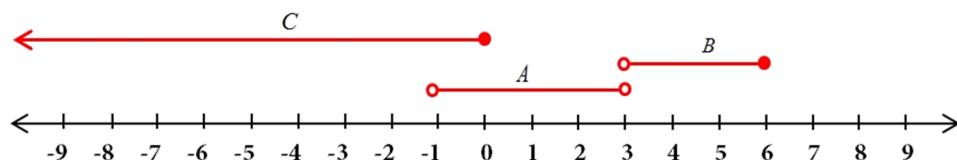
กราฟของช่วง $[1, \infty)$ คือ



ตัวอย่าง 2.76 กำหนด $A = (-1, 3)$, $B = (3, 6]$ และ $C = (-\infty, 0]$

จงหาค่าของ $A \cap (B \cup C)$ และ $A - (B \cap C)$

วิธีทำ เส้นจำนวนจริงแสดงเซต A, B และ C ได้ดังนี้



จากรูป $A \cap (B \cup C) = (-1, 0]$ และ $A - (B \cap C) = (-1, 3)$

2.3.3 อสมการ

อสมการเป็นประโยคที่กล่าวถึงการไม่เท่ากันและมีตัวแปร ซึ่งอสมการเป็นจริงหรือเท็จขึ้นอยู่กับจำนวนจริงที่มาแทนตัวแปร (ปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร, 2547 : 196)

เซตคำตอบของอสมการ เป็นเซตที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริงที่เมื่อนำจำนวนเหล่านี้มาแทนที่ตัวแปรแล้วทำให้อสมการเป็นจำนวนจริง

การแก้อสมการ คือ การหาเซตคำตอบของอสมการ ซึ่งนิยมใช้สมบัติของการไม่เท่ากันในการแก้อสมการ

สำหรับอสมการที่มีตัวแปร x เป็นประโยคเปิดและกล่าวถึงการไม่เท่ากันเมื่อนำจำนวนจริงมาแทนตัวแปรในอสมการ จะได้สมการที่เป็นจริงหรือเท็จ เซตคำตอบของอสมการที่มีตัวแปร x หมายถึง เซตที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริง โดยที่จำนวนจริงเหล่านี้เมื่อนำมาแทน x แล้วได้สมการที่เป็นจริง สำหรับการแก้อสมการนั้นส่วนใหญ่จะอาศัยคุณสมบัติที่ได้ศึกษามาแล้วในบทที่ผ่านมาดังจะแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้ (ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา, 2555 : 136)

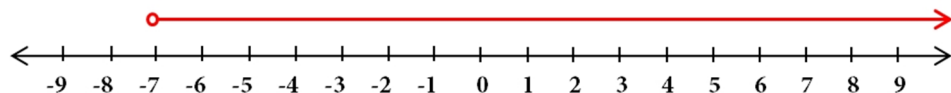
ตัวอย่าง 2.77 จงแก้อสมการ $\frac{x+4}{3} < 6+x$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{x+4}{3} &< 6+x \\ x+4 &< 18+3x \\ -2x &< 14 \\ 2x &> -14 \\ x &> -\frac{14}{2} \\ x &> 7\end{aligned}$$

ดังนั้น เซตของผลเฉลยคือ $\{x : x > -7\}$ หรือ $(-7, \infty)$

หรือแสดงบนเส้นจำนวนจริงได้ดังนี้



ตัวอย่าง 2.78 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $x^2 + 4x \leq 5$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}x^2 + 4x &\leq 5 \\ x^2 + 4x - 5 &\leq 0\end{aligned}$$

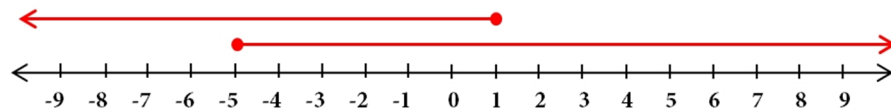
$$(x+5)(x-1) \leq 0$$

จาก $(x+5)(x-1) \leq 0$ แสดงว่า $x+5$ และ $x-1$ ต้องมีเครื่องหมายตรงข้ามกัน หรือ คูณกันเท่ากับ 0 จึงแยกออกเป็น 2 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 $x+5 \geq 0$ และ $x-1 \leq 0$

$x \geq -5$ และ $x \leq 1$

แสดงบนเส้นจำนวนได้ดังนี้

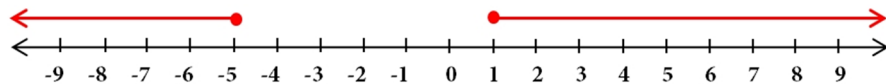


ผลเฉลยจากกรณีที่ 1 คือ $-5 \leq x \leq 1$

กรณีที่ 2 $x+5 \leq 0$ และ $x-1 \geq 0$

$x \leq -5$ และ $x \geq 1$

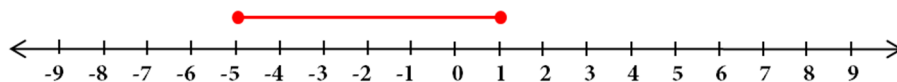
แสดงบนเส้นจำนวนได้ดังนี้



ผลเฉลยในกรณีที่ 2 คือไม่มีจำนวนจริง x ที่สอดคล้องกับอสมการ

ดังนั้น ผลเฉลยของอสมการ $x^2 + 4x \leq 5$ คือ $-5 \leq x \leq 1$

หรือแสดงบนเส้นจำนวนได้ดังนี้



ตัวอย่าง 2.79 จงแก้สมการ $x > \frac{1}{x}$

วิธีทำ จาก $x > \frac{1}{x}$

$$x - \frac{1}{x} > 0$$

$$\frac{x^2}{x} - \frac{1}{x} > 0$$

$$\frac{x^2 - 1}{x} > 0$$

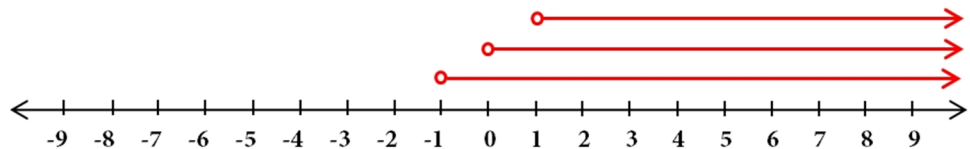
$$\frac{x^2 - 1^2}{x} > 0$$

$$\frac{(x+1)(x-1)}{x} > 0$$

ดังนั้นสมการ $\frac{(x+1)(x-1)}{x} > 0$ เป็นจริงได้จึงแยกออกเป็นกรณีทั้งหมด 4 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1	$x + 1 > 0$	และ	$x - 1 > 0$	และ	$x > 0$
จะได้	$x > -1$	และ	$x > 1$	และ	$x > 0$

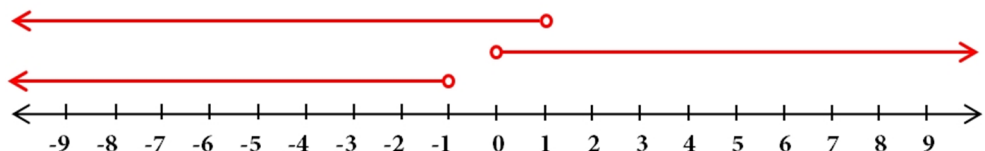
แสดงบนเส้นจำนวนได้ดังนี้



เซตของผลเฉลยจากกรณีที่ 1 คือ $\{x : x > 1\}$ หรือ $(1, \infty)$

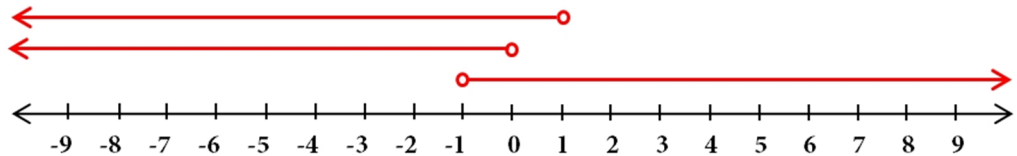
กรณีที่ 2	$x + 1 < 0$	และ	$x - 1 < 0$	และ	$x > 0$
จะได้	$x < -1$	และ	$x < 1$	และ	$x > 0$

แสดงบนเส้นจำนวนได้ดังนี้



เซตของผลเฉลยในกรณีที่ 2 คือ $\{ \}$ หมายถึงไม่มีจำนวนจริง x ที่สอดคล้องกับสมการ

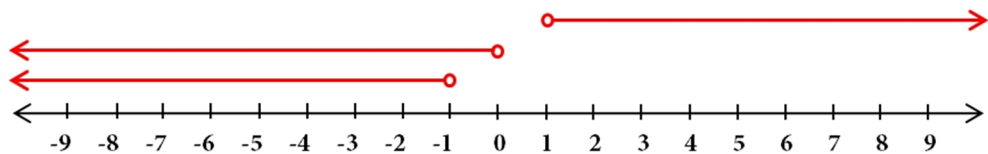
กรณีที่ 3 $x + 1 > 0$ และ $x - 1 < 0$ และ $x < 0$
 จะได้ $x > -1$ และ $x < 1$ และ $x < 0$
 แสดงบนเส้นจำนวนได้ดังนี้



เซตของผลเฉลยจากกรณีที่ 3 คือ $\{x \mid -1 < x < 0\}$ หรือ $(-1, 0)$

กรณีที่ 4 $x + 1 < 0$ และ $x - 1 > 0$ และ $x < 0$
 จะได้ $x < -1$ และ $x > 1$ และ $x < 0$

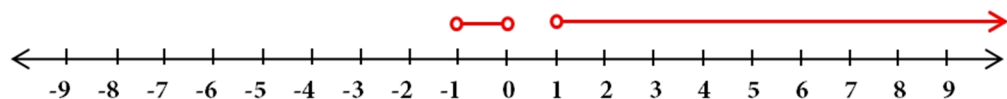
แสดงบนเส้นจำนวนได้ดังนี้



เซตของผลเฉลยในกรณีที่ 4 คือ $\{ \}$ หมายถึงไม่มีจำนวนจริง x ที่สอดคล้องกับอสมการ

ดังนั้น จากทั้ง 4 กรณี จำนวนจริง x ที่ทำให้ $x > \frac{1}{x}$ เป็นจริงคือ $x > 1$ หรือ $-1 < x < 0$

แสดงบนเส้นจำนวนได้ดังนี้



สรุปท้ายบทที่ 2

จะเห็นว่าเมื่อเราสามารถแปลงประโยคข้อความให้อยู่ในรูปนิพจน์พีชคณิตได้แล้วนั้นบาทครึ่งนิพจน์พีชคณิตอาจอยู่ในรูปแบบของสมการ อสมการ ซึ่งถ้าเป็นสมการที่อยู่ในรูป $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ $a_0, a_1, \dots, a_n$ เป็นจำนวนใด ๆ ดังนั้นก่อนที่จะไปศึกษาการหาผลเฉลยของสมการที่อยู่ในรูปแบบดังกล่าวนี้ก่อนอื่นเราต้องศึกษาการแยกตัวประกอบของพหุนามที่อยู่ในรูป $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ซึ่งได้แสดงการแยกพหุนามระดับชั้นสอง ชั้น สาม ไปเรื่อย ๆ จนถึงชั้นที่ n โดยจะใช้ทฤษฎีบทต่างๆ ซึ่งการเลือกใช้ทฤษฎีที่เหมาะสมกับพหุนามนั้น ๆ มันก็จะทำให้แยกตัวประกอบได้ง่ายทั้งนี้ขึ้นอยู่กับประสบการณ์ของผู้ศึกษานั้นเอง และเมื่อเราสามารถแยกตัวประกอบพหุนามได้แล้วเราสามารถนำไปช่วยในการหาผลเฉลยของสมการโดยอาศัยทฤษฎีบท $xy = 0$ จะได้ว่า $x = 0$ หรือ $y = 0$ นั้นเอง ส่วนการแก้อสมการ นั้นนอกจากเราสามารถแยกตัวประกอบของพหุนามได้แล้วก็ต้องอาศัยทฤษฎีบทสำหรับการแก้อสมการเพิ่มเติมด้วย

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2

1. จงแยกตัวประกอบพหุนามต่อไปนี้

1.1 $x^2 - 3x + 10$

1.2 $2x^2 - x + 6$

1.3 $x^2 - 2x$

1.4 $x^2 - 3$

1.5 $x^2 + 4$

1.6 $x^2 - 5x + 6$

1.7 $(x + 7)^2 - 8$

1.8 $3 - (x + 1)^2$

1.9 $(x + 1)^2 - (x - 3)^2$

1.10 $(x + 1)^3 - (x - 3)^3$

1.11 $(x - 2)^3 + (x + 1)^3$

1.12 $(x + 1)^4 - (x - 2)^4$

1.13 $x^4 - x^2 + 2x - 1$

1.14 $x^6 - x^3$

1.15 $x^3 - 125$

1.16 $x^3 + 2x^2 - 2x - 4$

1.17 $x^4 - 49$

1.18 $x^4 - 34x^2 + 225$

1.19 $x^6 + 27$

2. จงหาผลเฉลยของสมการต่อไปนี้

2.1 $x^2 - 3x + 10 = 0$

2.2 $2x^2 - x + 6 = 0$

2.3 $x^2 - 2x = 0$

2.4 $x^2 - 3 = 0$

2.5 $x^2 + 4 = 0$

2.6 $x^2 - 5x + 6 = 0$

2.7 $(x + 7)^2 - 8 = 0$

2.8 $3 - (x + 1)^2 = 0$

2.9 $(x + 1)^2 - (x - 3)^2 = 0$

2.10 $(x + 1)^3 - (x - 3)^3 = 0$

2.11 $(x - 2)^3 + (x + 1)^3 = 0$

2.12 $(x + 1)^4 - (x - 2)^4 = 0$

2.13 $x^4 - x^2 + 2x - 1 = 0$

2.14 $x^6 - x^3 = 0$

2.15 $x^3 - 125 = 0$

2.16 $x^3 + 2x^2 - 2x - 4 = 0$

2.17 $x^4 - 49 = 0$

2.18 $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$

2.19 $x^6 + 27 = 0$

3. จงหาผลเฉลยของอสมการต่อไปนี้

3.1 $3x - 1 < 0$

3.2 $3x + 5 \geq 13$

3.3 $2x - x^2 \leq -8$

3.4 $(x - 2)^2 \leq 1$

3.5 $\frac{x+1}{x-1} \leq 1$

เอกสารอ้างอิง

กมล เอกไทเจริญ. (2552). **คณิตศาสตร์ ม.3 เล่ม 1**. กรุงเทพมหานคร : ไฮเอ็ดพับลิชชิง จำกัด.

แก้ว สงขาว และคณะ. (2553). **พจนานุกรมศัพท์คณิตศาสตร์ฉบับราชบัณฑิตยสถาน**.

กรุงเทพมหานคร : นานมีบุ๊คส์พับลิเคชันส์.

จารุณี สุตะบุตร และคณะ. (2533). **หนังสือเรียนคณิตศาสตร์ 4**. กรุงเทพมหานคร : ครูสภาลาดพร้าว.

จำรัส อินสม และประทีป โรจนวิภาต. (2550). **คู่มือคณิตศาสตร์พื้นฐาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2**

ภาคเรียนที่ 2. กรุงเทพมหานคร : แม็ค.

ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. (2555). **คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม.5**. กรุงเทพมหานคร : แม็ค.

ปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร. (2547). **หลักการคณิตศาสตร์**. กรุงเทพมหานคร : ด่านสุทธาการพิมพ์.

รณชัย มาเจริญทรัพย์. (2551). **คณิตศาสตร์เพิ่มเติม เล่ม 1**. กรุงเทพมหานคร : ภูมิบัณฑิตการพิมพ์.

สุชิน ทำมาหากิน. (2540). **คู่มือคณิตศาสตร์ ม.3**. กรุงเทพมหานคร : มิตรสัมพันธ์ กราฟฟิคอาร์ต.

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 3

เนื้อหาประจำบท

1. ระบบพิกัดฉาก
2. กราฟเส้นตรง
3. ระบบสมการเส้นตรงสองตัวแปร
4. กราฟอสมการเส้นตรงสองตัวแปร

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. สามารถลงพิกัดใน 4 จตุภาคได้ถูกต้อง
2. เมื่อกำหนดจุด A และ B แล้วสามารถหา $\overline{AB}$
3. เมื่อกำหนดจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุดสองจุดใด ๆ ที่ต่างกัน สามารถหา ระยะทางระหว่างจุดทั้งสองได้
4. สามารถหาความชันของเส้นตรง
5. จากทฤษฎีบทการหาความชันของเส้นตรงแล้วสามารถประยุกต์นำไปใช้ในเรื่องที่ เกี่ยวข้องได้
6. สามารถตรวจสอบได้ว่าเส้นสองเส้นเป็นบเส้นขนานหรือเส้นตั้งฉาก
7. สามารถประยุกต์เส้นขนานและเส้นตั้งฉากกับเรื่องที่เกี่ยวข้องได้
8. วาดกราฟของสมการเส้นตรง
9. อธิบายกราฟของสมการที่อยู่ในรูป $Ax + By + C = 0$ โดยที่ A, B และ C เป็น จำนวนจริงใด ๆ และ A, B ไม่เท่ากับศูนย์ทั้งคู่
10. อธิบายลักษณะของระบบสมการเส้นสองตัวแปรได้
11. หาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรได้
12. สามารถวาดกราฟอสมการเส้นตรงสองตัวแปรได้

วิธีการสอนและกิจกรรมการเรียนรู้การสอนประจำบท

1. ผู้สอนบรรยายหัวข้อต่อไปนี้พร้อมเปิดโอกาสให้ซักถาม
 - 1.1 ระบบพิกัดฉาก
 - 1.2 กราฟเส้นตรง
 - 1.3 ระบบสมการเส้นตรงสองตัวแปร
 - 1.4 กราฟอสมการเส้นตรงสองตัวแปร

2. ให้นักศึกษาทำกิจกรรมต่อไปนี้

- 2.1 ศึกษาข้อมูล เกี่ยวกับเรื่องระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรประกอบเพิ่มเติม
- 2.2 ทำแบบฝึกหัดที่กำหนดให้

สื่อการเรียนการสอน

- 1. เอกสารประกอบการสอนและตำราต่าง ๆ
- 2. Slide Presentation

การวัดผลและการประเมินผล

- 1. สังเกตความสนใจของนักศึกษาขณะสอน ความตั้งใจ การฟัง การจดบันทึก และการซักถาม
- 2. แบบฝึกหัด
- 3. แบบทดสอบ
- 4. การมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอน

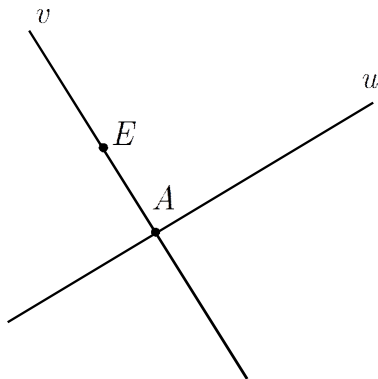
บทที่ 3

ระบบสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร

การศึกษาเนื้อหาเรื่องระบบสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปรนั้นก่อนอื่นจะเริ่มต้นศึกษาจากระบบพิกัดฉากแบบคาร์ทีเซียน ระยะทางระหว่างจุด กราฟเส้นตรงระบบสมการเส้นตรงสองตัวแปร กราฟอสมการเส้นตรงสองตัวแปรซึ่งเป็นพื้นฐานสำหรับแก้ปัญหาเรื่องกำหนดการเชิงเส้น ซึ่งกำหนดการเชิงเส้น เป็นเทคนิคที่เริ่มใช้ในปีค.ศ. 1947 ในช่วงที่สหรัฐอเมริกา กำลังประสบปัญหาทรัพยากรไม่เพียงพอ และต้องหาวิธีจัดสรรให้ได้ประโยชน์สูงสุด เทคนิคการแก้ปัญหาแบบนี้ถูกนำไปใช้ในหลายด้าน เช่น การผลิตสินค้าแต่ละประเภทด้วยวัตถุดิบที่มีให้ได้กำไรสูงสุด การขนส่งสินค้าให้สิ้นเปลืองน้อยที่สุด การหาปริมาณวัตถุดิบให้ได้ส่วนประกอบตามต้องการโดยเสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด การมอบหมายงานให้แต่ละกลุ่ม เพื่อให้งานสำเร็จในเวลาอันน้อยที่สุด ฯลฯ การศึกษาในเรื่อง ต้องมีพื้นฐานความรู้ ในเรื่องสมการเชิงเส้น สมการเชิงเส้นหลายตัวแปร และระบบสมการเชิงเส้นหลายตัวแปร ซึ่งปัญหาเหล่านี้ สำหรับในบทนี้ จะแบ่งออกเป็น 4 เรื่อง ได้แก่ระบบพิกัดฉาก กราฟเส้นตรง ระบบสมการเส้นตรงสองตัวแปร และกราฟอสมการเส้นตรงสองตัวแปร

3.1 ระบบพิกัดฉาก

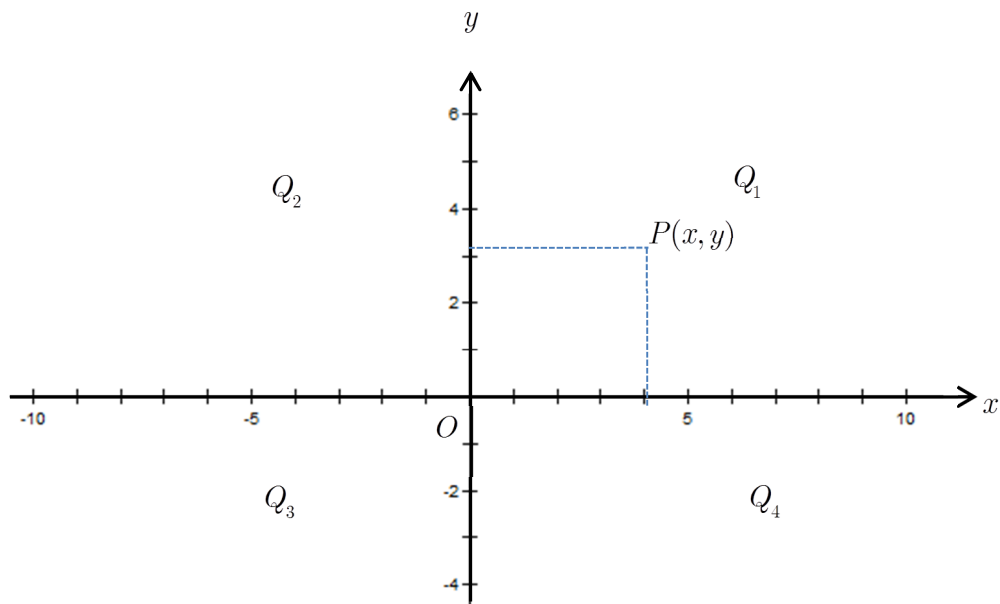
สำหรับเส้นตรงใด ๆ u และ E เป็นจุด ๆ หนึ่ง ถ้าเส้นตรง v เป็นเส้นตรงที่ลากผ่าน E ไปตั้งฉากกับ u ที่จุด A ว่าเป็นโปรเจกชันของจุด E บนเส้น u ดังภาพประกอบ 3.1



ภาพประกอบ 3.1 แสดงว่าจุด A เป็นโปรเจกชันของจุด E บนเส้น u

ที่มา : สุนทร แสงผล และก่อสุข วีระถาวร. 2541 : 12

สำหรับระบบพิกัดฉากแบบคาร์ทีเซียนนั้นประกอบด้วยระนาบ $R^2 = \{(x, y) / x, y \in R\}$ ซึ่งแทนด้วยแผนภาพของเส้นจำนวนจริง 2 เส้นตัดกันเป็นมุมฉาก เส้นตรงทั้งสองเรียกว่า แกนพิกัด แกนแนวนอน เรียกว่าแกน x และแกนแนวตั้งเรียกว่าแกน y จุดตัดระหว่างแกนทั้งสองคือจุด O เรียกว่าจุดกำเนิด แสดง



ภาพประกอบ 3.2 แสดงพิกัดฉากแบบคาร์ทีเซียน

ที่มา : ภัทรา เตชาภิวาทย์ 2540 : 1

แกนพิกัดทั้งสองแบ่งระนาบออกเป็น 4 ส่วนแต่ละส่วนเรียกว่า จตุภาค แสดงด้วยเซตของจุดในระนาบ ดังนี้

$$Q_1 = \{x \mid x > 0 \text{ และ } y > 0\}$$

$$Q_2 = \{x \mid x < 0 \text{ และ } y > 0\}$$

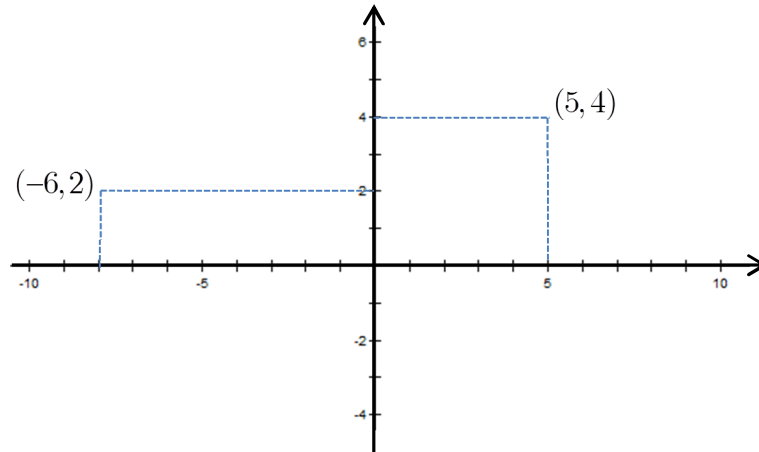
$$Q_3 = \{x \mid x < 0 \text{ และ } y < 0\}$$

$$Q_4 = \{x \mid x > 0 \text{ และ } y < 0\}$$

พิกัด ของจุดในระนาบ หมายถึงการกำหนดตำแหน่งของจุดโดยใช้ คู่อันดับ ของจำนวนจริง x คือระยะทางตามแนวแกน x และ y คือระยะทางตามแนวแกน y การวัดระยะทางตามแนวแกน พิกัดต้องเริ่มจากจุดกำเนิดเสมอ และใช้เครื่องหมายบอกทิศทางของการวัดระยะทางดังนี้

ระยะทางตามแกน x วัดจากจุดกำเนิดไปทางขวาเป็นบวก และไปทางซ้ายเป็นลบ
ระยะทางตามแกน y วัดจากจุดกำเนิดไปข้างบนเป็นบวก และลงข้างล่างเป็นลบ
ดังภาพประกอบ 3.2 เมื่อกำหนดพิกัดของจุดให้ก็สามารถลง จุดนั้น ๆ ในระนาบได้

ตัวอย่าง 3.1 จงลงจุดซึ่งมีพิกัด $(5, 4)$ และ $(-6, 2)$



จากตัวอย่าง

$(5, 4) \in Q_1$ เพราะ $x > 0$ และ $y > 0$

$(-6, 2) \in Q_2$ เพราะ $x < 0$ และ $y > 0$

3.1.1 ระยะบอกทิศทาง

บทนิยาม 3.1

ถ้า A และ B เป็นจุดใด ๆ เราเรียก $\overline{AB}$ ว่าระยะบอกทิศทางจากจุด A ไปยังจุด B

บทนิยาม 3.2

ถ้า A และ B มีพิกัด (x_1, b) และ (x_2, b) ตามลำดับ $\overline{AB} = x_2 - x_1$ เมื่อ b เป็นค่าคงตัว

บทนิยาม 3.3

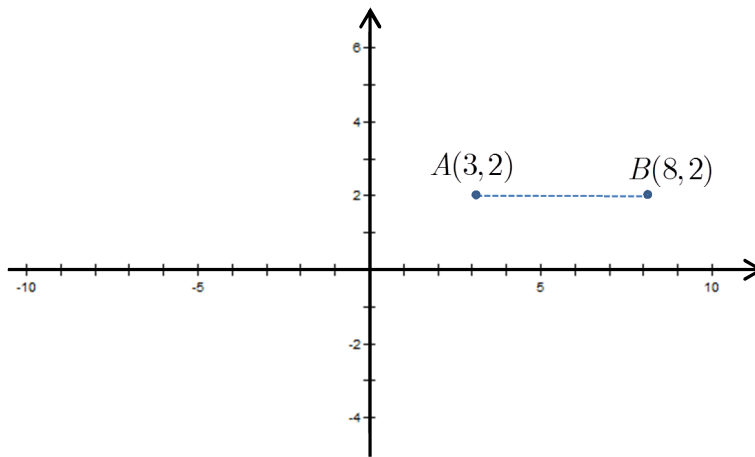
ถ้า A และ B มีพิกัด (a, y_1) และ (a, y_2) ตามลำดับ $\overline{AB} = y_2 - y_1$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่าง 3.2 จงหา $\overline{AB}$ เมื่อกำหนดจุด $A(3,2)$ และ $B(8,2)$

วิธีทำ จากบทนิยาม 3.2 นั่นคือ $\overline{AB} = x_2 - x_1$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ว่า} \quad \overline{AB} &= 8 - 3 \\ &= 5\end{aligned}$$

สามารถแสดงได้ดังภาพ

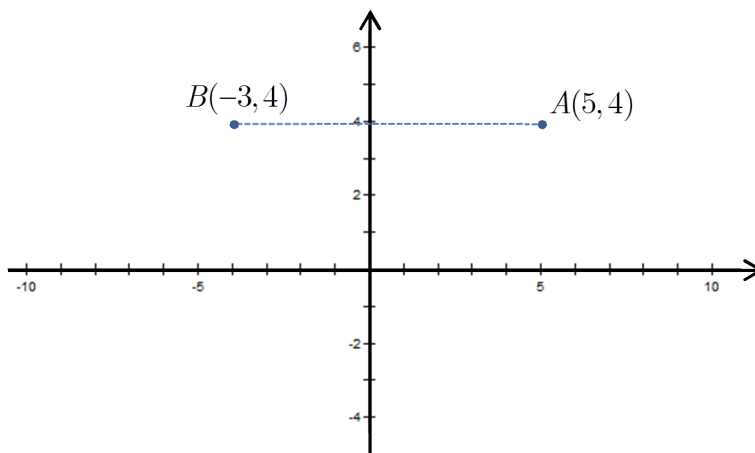


ตัวอย่าง 3.3 จงหา $\overline{AB}$ เมื่อกำหนดจุด $A(5,4)$ และ $B(-3,4)$

วิธีทำ จากบทนิยาม 3.2 นั่นคือ $\overline{AB} = x_2 - x_1$

$$\text{จะได้ว่า} \quad \overline{AB} = -3 - 5 = -8$$

สามารถแสดงได้ดังภาพ



ข้อสังเกต 3.1

$\overline{AB}$ มีค่าเป็นบวก ถ้าจุด B อยู่ทางขวาของจุด A

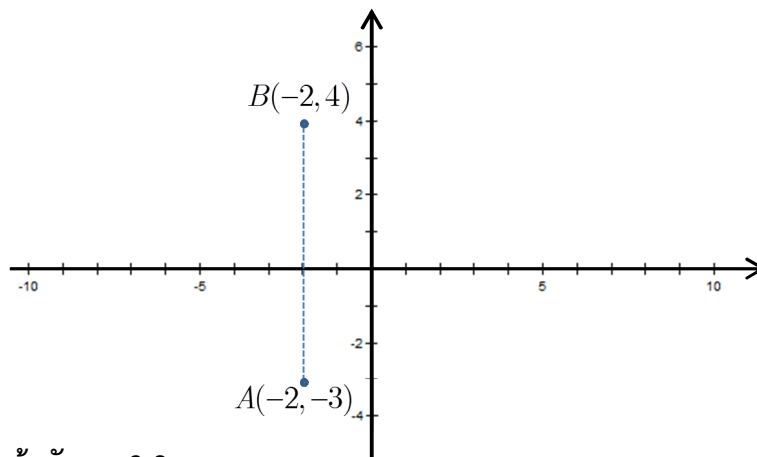
$\overline{AB}$ มีค่าเป็นลบ ถ้าจุด B อยู่ทางซ้ายของจุด A

ตัวอย่าง 3.4 จงหา $\overline{AB}$ เมื่อกำหนดจุด $A(-2, -3)$ และ $B(-2, 4)$

วิธีทำ จากบทนิยาม 3.3 นั่นคือ $\overline{AB} = y_2 - y_1$

จะได้ว่า $\overline{AB} = 4 - (-3) = 7$

สามารถแสดงได้ดังภาพ



ข้อสังเกต 3.2

$\overline{AB}$ มีค่าเป็นบวกถ้าจุด B อยู่เหนือจุด A

$\overline{AB}$ มีค่าเป็นลบถ้าจุด B อยู่ใต้จุด A

3.1.2 ระยะทาง

ระยะทางคือระยะที่ไม่บอกทิศทางหรือกล่าวได้ว่าระยะทางระหว่างจุดสองจุดใด ๆ คือ ค่าสัมบูรณ์ของระยะบอกทิศทางระหว่างจุดทั้ง 2 นั้นเอง เช่น $|AB|$ หรือ $|BA|$ คือระยะทางระหว่างจุด A กับจุด B เนื่องจาก $|AB| \geq 0$ และ $|BA| \geq 0$ ดังนั้นระยะทางระหว่างจุดสองจุดจึงเป็นตัวเลขที่ไม่ติดลบ (ภัทรา เตชาวิทย์, 2540 : 4)

ตัวอย่าง 3.5 จงหาระยะทางระหว่างจุด A และ B เมื่อกำหนดพิกัดของจุดทั้งสองดังต่อไปนี้

1. $A(3, 2)$ และ $B(8, 2)$
2. $A(5, 4)$ และ $B(-3, 4)$
3. $A(-2, -3)$ และ $B(-2, 4)$

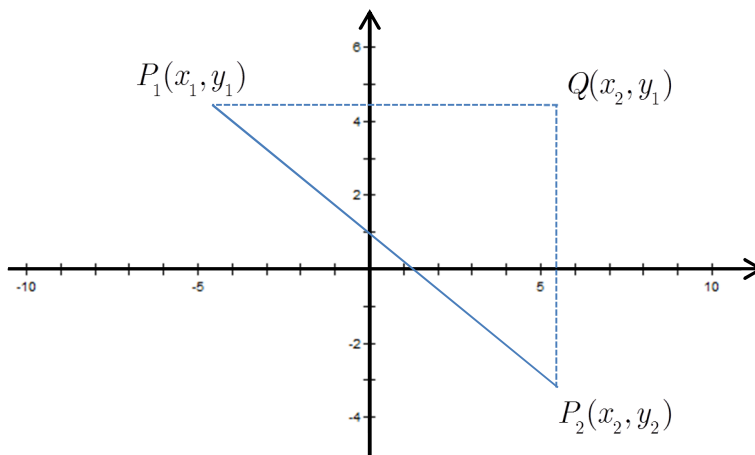
วิธีทำ ใช้ทฤษฎีบท 3.1 $|\overline{AB}|$ คือระยะทางระหว่างจุดทั้งสอง

$$1. |\overline{AB}| = |3 - 8| = |-5| = 5$$

$$2. |\overline{AB}| = |-3 - 5| = |-8| = 8$$

$$3. |\overline{AB}| = |4 - (-3)| = 7$$

จากตัวอย่างที่ผ่านมาจะเห็นว่าหาระยะทางระหว่างสองจุดนั้นโดยการใช้ทฤษฎีบท 3.1 เป็นการหาจากระยะบอกทิศทางจากจุด A ไปยังจุด B ซึ่งจะแยกเป็นเฉพาะกรณี A และ B มีพิกัด (x_1, b) และ (x_2, b) ซึ่งจุดทั้งสองอยู่บนเส้นตรงที่ขนานกับแกน x และกรณีที่ A และ B มีพิกัด (a, y_1) และ (a, y_2) ซึ่งอยู่บนเส้นตรงที่ขนานกับแกน y เท่านั้น แต่ถ้าจุด P และ Q อยู่บนเส้นตรงที่ไม่ขนานกับแกน x และแกน y เราสามารถหาระยะทางระหว่างจุด P_1 และ P_2 ได้ดังนี้ (เล็ค สิทธิโกศล, 2541 : 3)



ภาพประกอบ 3.3 แสดงการหาระยะทางระหว่างจุด P_1 และ P_2

ที่มา : เล็คสิทธิโกศล 2541 : 3

ลากส่วนของเส้นตรง $\overline{P_1Q}$ และ $\overline{P_2Q}$ ให้ขนานกับแกน x และ y ตามลำดับ จุด Q จะมีพิกัดเป็น (x_2, y_1) และมีมุม P_1QP_2 เป็นมุมฉาก จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 |P_1P_2| &= \sqrt{|P_1Q|^2 + |P_1Q|^2} \\
 &= \sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2} \\
 &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}
 \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 3.1

ถ้า $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุดสองจุดใด ๆ ที่ต่างกัน แล้ว
ระยะทางระหว่างจุดทั้งสองคือ $|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

ตัวอย่าง 3.6 จงหาระยะทางระหว่างจุด $P_1(7, 3)$ และ $P_2(4, -1)$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ } |P_1P_2| &= \sqrt{(7 - 4)^2 + (3 - (-1))^2} \\
 &= \sqrt{3^2 + 4^2} \\
 &= \sqrt{9 + 16} \\
 &= \sqrt{25} \\
 &= 5
 \end{aligned}$$

ดังนั้น ระยะทางระหว่างจุด $P_1(7, 3)$ และ $P_2(4, -1)$ มีค่าเท่ากับ 5 หน่วย

ตัวอย่าง 3.7 จงแสดงว่า $A(-1, 3), B(4, 1)$ และ $C(2, -4)$ เป็นจุดมุมของสามเหลี่ยมมุมฉาก

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ } \text{พิจารณา } |AB| &= \sqrt{(4 - (-1))^2 + (1 - 3)^2} \\
 &= \sqrt{5^2 + 2^2} \\
 &= \sqrt{25 + 4} \\
 &= \sqrt{29} \\
 |BC| &= \sqrt{(2 - 4)^2 + ((-4) - 1)^2} \\
 &= \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} \\
 &= \sqrt{4 + 25} \\
 &= \sqrt{29}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{และ} \quad |AC| &= \sqrt{(2 - (-1))^2 + ((-4) - 3)^2} \\
 &= \sqrt{3^2 + (-7)^2} \\
 &= \sqrt{9 + 49} \\
 &= \sqrt{58}
 \end{aligned}$$

พบว่า $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$ ซึ่งเป็นคุณสมบัติสามเหลี่ยมมุมฉาก

ดังนั้น สามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากโดยมุมที่ B เป็นมุมฉาก

ตัวอย่าง 3.8 จงแสดงว่า $A(3, 8), B(-11, 3)$ และ $C(-8, -2)$ เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

วิธีทำ พิจารณา $|AB| = \sqrt{(3 - (-11))^2 + (8 - 3)^2}$

$$= \sqrt{14^2 + 5^2}$$

$$= \sqrt{196 + 25}$$

$$= \sqrt{221}$$

$$|BC| = \sqrt{(-11 - (-8))^2 + (3 - (-2))^2}$$

$$= \sqrt{(-3)^2 + 5^2}$$

$$= \sqrt{9 + 25}$$

$$= \sqrt{34}$$

$$\text{และ} \quad |AC| = \sqrt{(3 - (-8))^2 + (8 - (-2))^2}$$

$$= \sqrt{11^2 + 10^2}$$

$$= \sqrt{121 + 100}$$

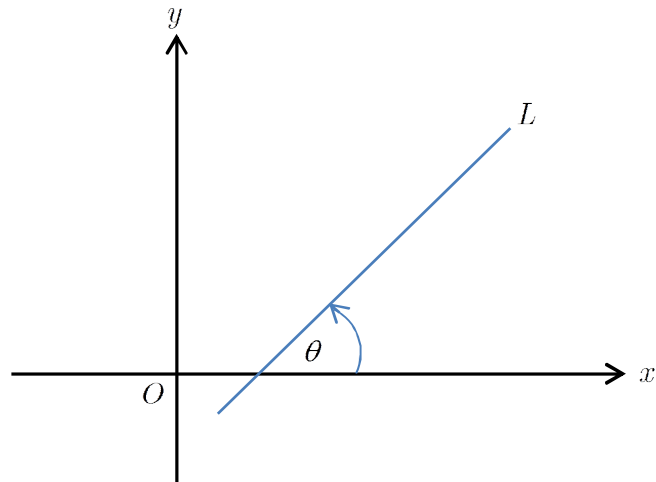
$$= \sqrt{221}$$

$$\text{พบว่า} \quad |AB| = |AC|$$

ดังนั้น สามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

3.1.3 ความชันของเส้นตรง

มุมเอียงของเส้นตรง L ซึ่งตัดกับแกน x ในที่นี้แทนด้วยสัญลักษณ์ θ (ทีตา) คือมุมที่วัดจากแกน x ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาไปยังเส้นตรง L โดยที่ $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ เส้นตรงที่ขนานกับแกน x ทุกเส้นมีมุมเอียงเท่ากับ 0° ดังภาพประกอบ 3.4



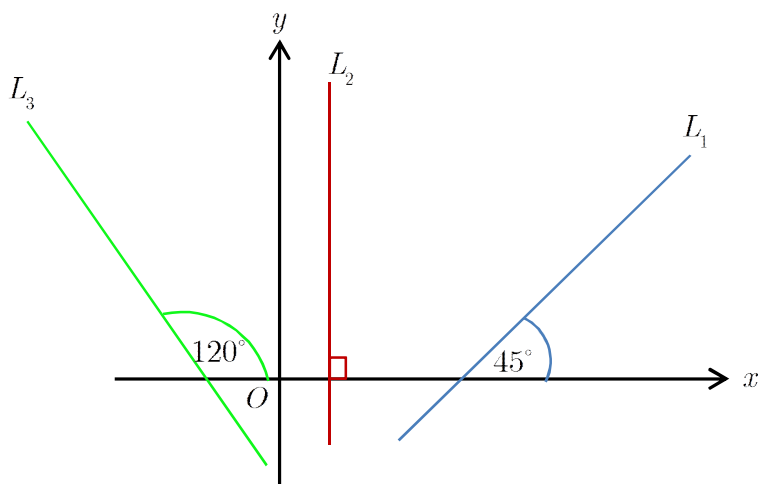
ภาพประกอบ 3.4 แสดงมุม θ เป็นมุมเอียงของเส้นตรง L

ที่มา : เลิศสิทธิโกศล 2541 : 4

บทนิยาม 3.4

ความชันของเส้นตรง L (เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ m) คือค่าแทนเจนต์ของมุมเอียงของเส้นตรง L

พิจารณารูปต่อไปนี้



ภาพประกอบ 3.5 แสดงความชันของเส้นตรง L_1, L_2 และ L_3

จากภาพประกอบ 3.5

$$\text{ความชันของ } L_1 = \tan 45^\circ = 1$$

$$\text{ความชันของ } L_2 = \tan 90^\circ \text{ หาค่าไม่ได้}$$

$$\text{ความชันของ } L_3 = \tan 120^\circ = -\sqrt{120}$$

นั่นคือถ้า $0^\circ < \theta < 90^\circ$ จะได้ $\tan \theta > 0$ ดังนั้นความชันของเส้นตรงมีค่าเป็นบวกถ้า $90^\circ < \theta < 180^\circ$ จะได้ $\tan \theta < 0$ ดังนั้น ความชันของเส้นตรงมีค่าเป็นลบ และถ้า $\theta = 90^\circ$ แล้ว เราไม่สามารถหาความชันของเส้นตรงได้ และการหาความชันของเส้นตรงนั้นไม่จำเป็นเสมอไปว่าต้องทราบมุมเอียงของเส้นตรงแต่ในกรณีที่เรารับจุดเพียงสองจุดที่เส้นตรงผ่านเราก็สามารถหาค่าความชันของเส้นตรงเส้นนั้นได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

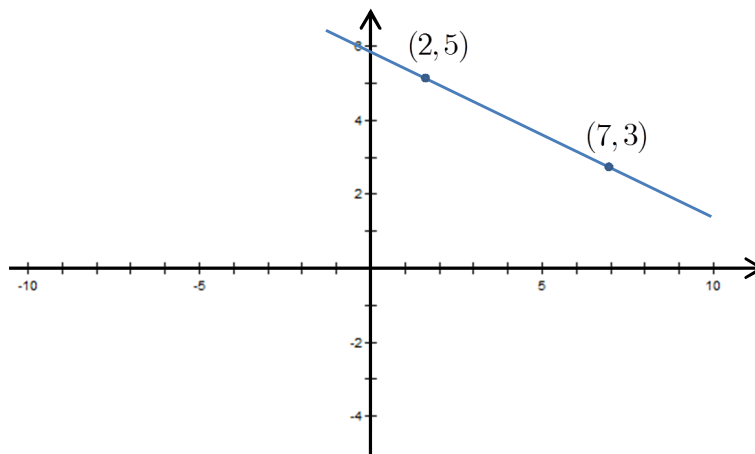
ทฤษฎีบท 3.2

เส้นตรง L ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เมื่อ $x_1 \neq x_2$

$$\text{มีความชันเท่ากับ } m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ตัวอย่าง 3.9 จงหาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2, 5)$ และ $(7, 3)$

วิธีทำ



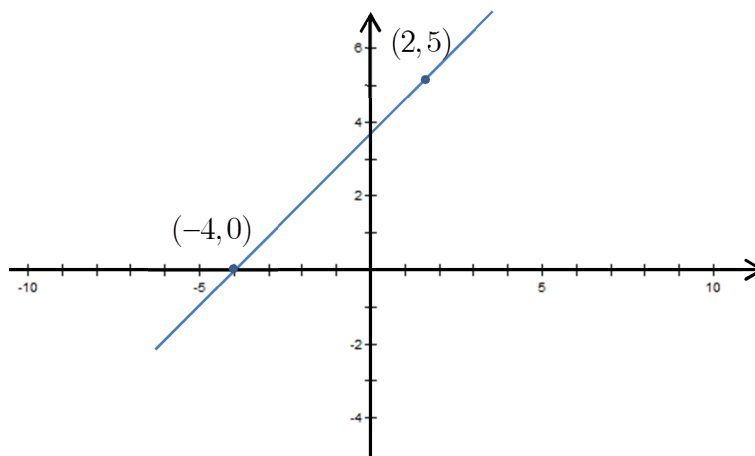
ให้ $(x_1, y_1) = (2, 5)$ และ $(x_2, y_2) = (7, 3)$

$$\text{ความชัน } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 5}{7 - 2} = -\frac{2}{5}$$

หรือ ความชัน $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{5 - 3}{2 - 7} = -\frac{2}{5}$

ตัวอย่าง 3.10 จงหาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-4, 0)$ และ $(2, 5)$

วิธีทำ



ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-4, 0)$ และ $(2, 5)$

คือ $m = \frac{5 - 0}{2 - (-4)} = \frac{5}{6}$

ตัวอย่าง 3.11 เส้นตรง L มีความชันเท่ากับ 3 และผ่านจุด $P_1(0, 1)$ และ $P_2(x, 7)$ จงหาพิกัดของจุด P_2

วิธีทำ ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ คือ $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$\text{จะได้ } 3 = \frac{7 - 1}{x - 0}$$

$$3 = \frac{7 - 1}{x}$$

$$3x = 7 - 1$$

$$x = \frac{6}{3}$$

$$x = 2$$

ดังนั้น P_2 มีพิกัด $(2, 7)$

3.1.5 เส้นขนานและเส้นตั้งฉาก

บทนิยาม 3.5

ให้ θ_1 และ θ_2 เป็นมุมเอียงของเส้นตรง L_1 และ L_2 ตามลำดับ
ถ้า $\theta_1 = \theta_2$ เรากล่าวว่าเส้นตรง L_1 ขนานกับเส้นตรง L_2

บทนิยาม 3.6

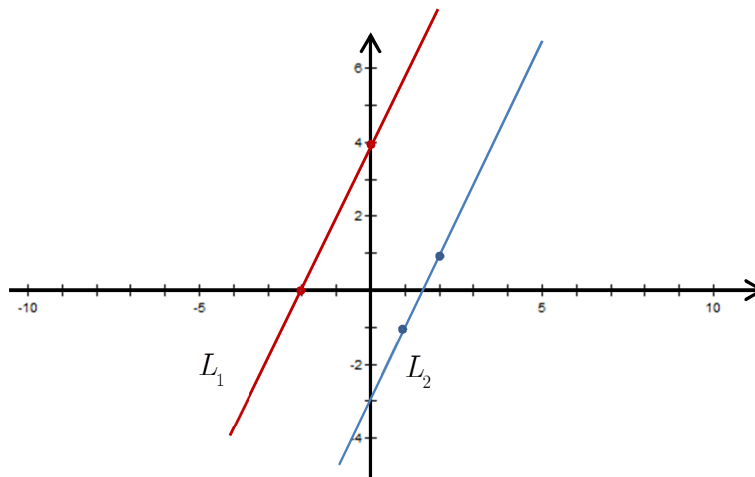
เส้นตรง 2 เส้นจะตั้งฉากกันก็ต่อเมื่อผลต่างของมุมเอียงของเส้นตรงทั้งสอง
เท่ากับ 90°

ทฤษฎีบท 3.3

เส้นตรงสองเส้นที่ไม่ขนานกับแกน y จะขนานกันก็ต่อเมื่อ
ความชันของเส้นตรงทั้งสองเส้นเท่ากัน

ตัวอย่าง 3.12 จงแสดงว่า เส้นตรงที่เชื่อมจุด $(1, -1)$ กับ $(2, 1)$ ขนานกับเส้นตรงที่เชื่อมจุด $(0, 4)$ กับ $(-2, 0)$

วิธีทำ เส้นตรงที่เชื่อมจุด $(1, -1)$ กับ $(2, 1)$ และเส้นตรงที่เชื่อมจุด $(0, 4)$ กับ $(-2, 0)$
แสดงได้ดังกราฟต่อไปนี้



ความชันของเส้นตรง $L_1 = \frac{1 - (-1)}{2 - 1} = 2$ และ

ความชันของเส้นตรง $L_1 = \frac{4 - 0}{2 - 0} = 2$

จะเห็นว่าความชันของเส้นตรง L_1 และ L_2 มีค่าเท่ากัน

ดังนั้น เส้นตรง L_1 และ L_2 ขนานกัน

ตัวอย่าง 3.13 กำหนดให้เส้นตรงที่เชื่อมจุด $(3, 3)$ กับ $(4, 7)$ ขนานกับเส้นตรงที่เชื่อมจุด $(2, -9)$ กับ $(x, 0)$ จงแสดงวิธีทำเพื่อหาค่า x

วิธีทำ ให้ m เป็นความชันของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $(2, 3)$ กับ $(4, 7)$

$$\text{จะได้ } m = \frac{7 - 3}{4 - 2} = 2$$

เนื่องจากเส้นตรงที่ผ่านจุด $(3, 3)$ กับ $(4, 7)$ ขนานกับเส้นตรงที่เชื่อมจุด $(-2, 3)$ กับ $(x, 0)$ ความชันของเส้นตรงทั้งสองเส้นเท่ากัน

$$\text{ได้ } 2 = \frac{-9 - 0}{2 - x}$$

$$4(2 - x) = -9$$

$$8 - 4x = -9$$

$$-4x = -9 - 8$$

$$-4x = -17$$

$$x = \frac{17}{4}$$

ดังนั้น $x = \frac{17}{4}$

ทฤษฎีบท 3.4

เส้นตรง L_1 มี θ_1 เป็นมุมเอียง m_1 เป็นความชัน เส้นตรง L_2

มี θ_2 เป็นมุมเอียง m_2 เป็นความชัน โดยที่ $\theta_1 < \theta_2$ และ $\theta_1 \neq 0^\circ$ แล้ว

L_1 ตั้งฉากกับ L_2 ก็ต่อเมื่อ $m_1 \cdot m_2 = -1$

ตัวอย่าง 3.14 จงแสดงว่า เส้นตรงที่เชื่อมจุด $(3,1)$ กับ $(6,0)$ ตั้งฉากกับเส้นตรงที่เชื่อมจุด $(1,8)$ กับ $(0,5)$

วิธีทำ ให้ m_1 เป็นความชันของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $(3,1)$ กับ $(6,0)$

$$\text{จะได้ } m_1 = \frac{0-1}{6-3} = -\frac{1}{3}$$

ให้ m_2 เป็นความชันของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $(1,8)$ กับ $(0,5)$

$$\text{จะได้ } m_2 = \frac{8-5}{1-0} = 3$$

$$\text{เนื่องจาก } m_1 \cdot m_2 = -\frac{1}{3} \cdot 3 = -1$$

ดังนั้น เส้นตรงที่เชื่อมจุด $(3,1)$ กับ $(6,0)$ ตั้งฉากกับเส้นตรงที่เชื่อมจุด $(1,8)$ กับ $(0,5)$

ตัวอย่าง 3.15 จงแสดงว่า จุด $A(8,6), B(4,8)$ และ $C(2,4)$ เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมมุมฉาก

วิธีทำ ให้ m_1 แทนความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด A และจุด $B = \frac{8-6}{4-8} = -\frac{1}{2}$

$$\text{ให้ } m_2 \text{ แทนความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด } B \text{ และจุด } C = \frac{4-8}{2-4} = 2$$

$$\text{เนื่องจาก } m_1 \cdot m_2 = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$$

ดังนั้น จุด $A(8,6), B(4,8)$ และ $C(2,4)$ เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี มุม B เป็นมุมฉาก

ตัวอย่าง 3.16 เส้นตรง L_1 เชื่อมต่อด้วยจุดสองจุด $(2,-6)$ กับ $(1,-4)$ จงหาความชันของเส้นตรง L_2 ซึ่งตั้งฉากกับเส้นตรง L_1

วิธีทำ ให้ m_1 แทนความชันของเส้นตรง L_1

$$\text{จะได้ } m_1 = \frac{-4-(-6)}{1-2} = -2$$

ให้ m_2 เป็นความชันของเส้นตรง L_2

เนื่องจาก เส้นตรง L_1 ตั้งฉากกับเส้นตรง L_2

$$\text{จะได้ } m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$-2 \cdot m_2 = -1$$

$$m_2 = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น เส้นตรง L_2 มีความชันเท่ากับ $\frac{1}{2}$

3.2 กราฟและสมการเส้นตรง

สมการเชิงเส้น หรือสมการเส้นตรงหรือส่วนของเส้นตรง ซึ่งเป็นสมการกำลังหนึ่งสองตัวแปร มีรูปแบบคือ $Ax + By + C = 0$ เมื่อ (x, y) เป็นจุดบนเส้นตรง A, B และ C เป็นจำนวนจริงใด ๆ โดยที่ A และ B ไม่เป็นศูนย์ทั้งคู่จากจุดสองจุดใด ๆ มีเส้นตรงผ่านได้เพียง 1 เส้น การเขียนกราฟสมการเส้นตรงจึงสามารถทำได้โดยง่ายจากการหาจุดสองจุดที่อยู่บนเส้นตรงผ่านจุดทั้งสอง ซึ่งจุดที่หาได้ง่ายที่สุดคือ จุดที่เส้นตรงตัดแกนพิกัดฉาก ซึ่งเรียกว่า ส่วนตัดแกน สามารถทำได้คือ ส่วนตัดแกน x หาได้โดยการแทนค่า $y = 0$ แล้วหาค่า x ในทำนองเดียวกัน ส่วนตัดแกน y หาได้โดยการแทนค่า $x = 0$ แล้วหาค่า y (อำพล ธรรมเจริญ และอุบลวรรณ เงินวิจิตร, 2541 : 56-57)

ทฤษฎีบท 3.5

เส้นตรงที่มีความชัน m และผ่านจุด (x_1, y_1) มีสมการเป็น

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

สมการเส้นตรงเป็นเส้นที่เขียนกราฟได้ง่าย เพียงแค่สามารถกำหนดจุด 2 จุด ก็สามารถเขียนเส้นตรงได้ 1 เส้น ดังนั้นจุดที่เส้นตรงผ่านจึงเป็นเงื่อนไขเบื้องต้นที่สำคัญในการศึกษาเส้นตรงซึ่งจะเริ่มจากการหาสมการเส้นตรงแบบต่าง ๆ ซึ่งในที่นี้เราจะศึกษาเฉพาะสมการเส้นตรง และสมการเส้นตรงนั้นเขียนได้ในหลายรูปแบบซึ่งกล่าวดังต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.17 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(3, -5)$ และมีความชันเท่ากับ 4

วิธีทำ เส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1, y_1) มีสมการเป็น $y - y_1 = m(x - x_1)$

นั่นคือเส้นตรงที่ผ่านจุด $(3, -5)$ และมีความชันเท่ากับ 4

$$\text{จะได้} \quad y - (-5) = 4(x - 3)$$

$$y + 5 = 4x - 12$$

$$-4x + y + 17 = 0$$

$$4x - y - 17 = 0$$

ดังนั้น สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(3, -5)$ และมีความชันเท่ากับ 4 คือ $4x - y - 17 = 0$

ตัวอย่าง 3.18 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-1, -3)$ และมีความชันเท่ากับ $\frac{1}{3}$

วิธีทำ เส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1, y_1) มีสมการเป็น $y - y_1 = m(x - x_1)$

นั่นคือเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-1, -3)$ และมีความชันเท่ากับ $\frac{1}{3}$

$$\text{จะได้} \quad y - (-3) = \frac{1}{3}(x - (-1))$$

$$y + 3 = \frac{1}{3}(x + 3)$$

$$3(y + 3) = x + 3$$

$$3y + 9 = x + 3$$

$$-x + 3y + 6 = 0$$

$$x - 3y - 6 = 0$$

ดังนั้น สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-1, -3)$ และมีความชันเท่ากับ $\frac{1}{3}$ คือ $x - 3y - 6 = 0$

ทฤษฎีบท 3.6

เส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) เมื่อ $x_1 \neq x_2$ มีสมการเป็น

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \text{ หรือ } y - y_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2)$$

ตัวอย่าง 3.19 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(0, -2)$ และ $(1, 3)$

วิธีทำ เส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) มีสมการเป็น

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

จะได้ $y - (-2) = \frac{3 - (-2)}{1 - 0}(x - 0)$

$$y + 2 = \frac{3 + 2}{1}(x - 0)$$

$$y + 2 = 5x$$

$$5x - y - 2 = 0$$

หรือ $y - y_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2)$

จะได้ $y - 3 = \frac{3 - (-2)}{1 - 0}(x - 1)$

$$y - 3 = 5(x - 1)$$

$$y - 3 = 5x - 5$$

$$5x - y - 2 = 0$$

ดังนั้น สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(0, -2)$ และ $(1, 3)$ คือ $5x - y - 2 = 0$

ทฤษฎีบท 3.7

เส้นตรงที่มีความชัน m ระยะตัดแกน y เท่ากับ b มีสมการเป็น $y = mx + b$

ตัวอย่าง 3.20 จงหาความชันและระยะตัดแกน y ของเส้นตรงที่มีสมการเป็น $6x - 4y + 18 = 0$

วิธีทำ เขียนสมการให้อยู่ในรูปแบบความชันและระยะตัดแกน

$$\text{จากโจทย์} \quad 6x - 4y + 18 = 0$$

$$\text{จะได้} \quad 6x + 18 = -4y$$

$$\frac{6x + 18}{4} = -y$$

$$\frac{6x + 18}{4} = -y$$

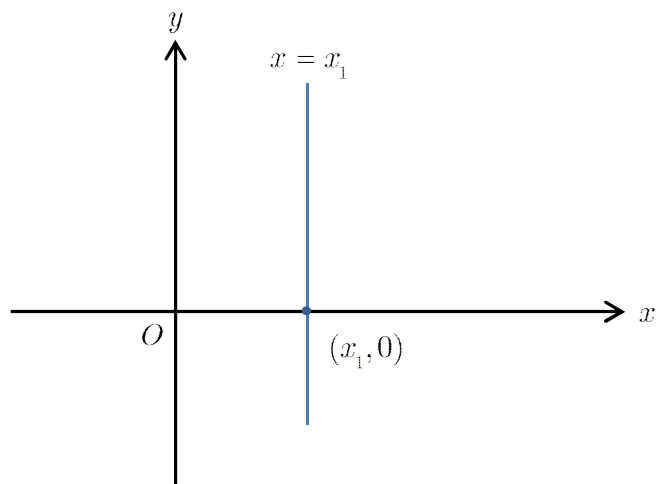
$$\frac{6x}{4} + \frac{18}{4} = -y$$

$$\frac{3}{2}x + \frac{9}{2} = -y$$

$$y = -\frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$$

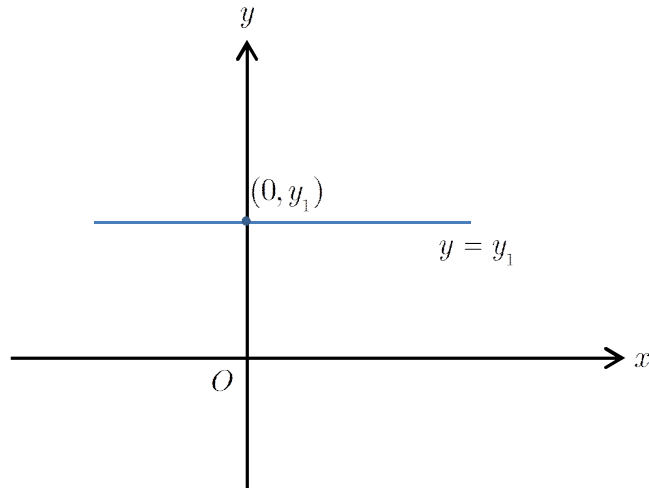
ดังนั้น สมการ $6x - 4y + 18 = 0$ มีความชันเท่ากับ $m = -\frac{3}{2}$ และระยะตัดแกน y คือ $\frac{9}{2}$

นอกจากเส้นตรงในรูปแบบที่ได้กล่าวมาแล้ว เรายังพบเห็นสมการเส้นตรงที่เขียนในรูปสมการ $x = x_1$ ซึ่งเรียกว่าเส้นตรงในแนวดิ่ง และเขียนในรูป $y = y_1$ ซึ่งเรียกว่าเส้นตรงในแนวนอน ให้สังเกตว่าเราไม่สามารถหาความชันของเส้นตรงในแนวดิ่งได้แต่ความชันของเส้นตรงในแนวนอนมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังภาพประกอบ 3.5 และ 3.6 (เล็ค สิทธิโกศล, 2541 : 15)



ภาพประกอบ 3.6 สมการเส้นตรงที่เขียนในรูปสมการ $x = x_1$

ที่มา : เลิศสิทธิโกศล 2541 : 15



ภาพประกอบ 3.7 สมการเส้นตรงที่เขียนในรูปสมการ $y = y_1$

ที่มา : เลิศสิทธิโกศล 2541 : 15

ทฤษฎีบท 3.8

เส้นตรงที่มีระยะตัดแกน x เท่ากับ a ระยะตัดแกน y เท่ากับ b
โดยที่ a และ b ไม่เท่ากับศูนย์มีสมการเป็น

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

ตัวอย่าง 3.21 จงหาระยะตัดแกน x และระยะตัดแกน y สมการเส้นตรง $6x - 4y + 24 = 0$

วิธีทำ จากสมการ

$$6x - 4y + 24 = 0$$

จัดรูปใหม่ได้ดังต่อไปนี้

$$6x - 4y = -24$$

$$\frac{6x - 4y}{-24} = 1$$

$$\frac{6x}{-24} - \frac{4y}{-24} = 1$$

$$-\frac{6x}{24} + \frac{4y}{24} = 1$$

$$-\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$$

$$\frac{x}{-4} + \frac{y}{6} = 1$$

ดังนั้น ระยะตัดแกน x และระยะตัดแกน y เท่ากับ -4 และ -6 ตามลำดับ

ตัวอย่าง 3.22 สมการเส้นตรงที่มีระยะตัดแกน x และระยะตัดแกน y เท่ากับ 2 และ -5 ตามลำดับ

วิธีทำ จากทฤษฎีบทจะได้ $\frac{x}{2} + \frac{y}{-5} = 1$

$$\frac{x}{2} - \frac{y}{5} = 1$$

$$\frac{5x - 2y}{10} = 1$$

$$5x - 2y = 10$$

$$5x - 2y - 10 = 0$$

ดังนั้น สมการเส้นตรงที่มีระยะตัดแกน x และระยะตัดแกน y เท่ากับ 2 และ -5 คือ $5x - 2y - 10 = 0$

ตัวอย่าง 3.23 สมการเส้นตรงที่มีจุดตัดแกนคือ $(-3, 0)$ และ $(0, 7)$

วิธีทำ จะได้ว่า $a = -3$ และ $b = 7$

แทนในทฤษฎีบท 3.8 จะได้ $\frac{x}{-3} + \frac{y}{7} = 1$

$$-\frac{x}{3} + \frac{y}{7} = 1$$

$$\frac{-7x + 3y}{21} = 1$$

$$-7x + 3y = 21$$

$$-7x + 3y - 21 = 0 \quad \text{หรือ}$$

$$7x - 3y + 21 = 0$$

ดังนั้น สมการเส้นตรงที่มีจุดตัดแกนคือ $(-3, 0)$ และ $(0, 7)$ คือ $7x - 3y + 21 = 0$

บทนิยาม 3.7

สมการที่อยู่ในรูป $Ax + By + C = 0$ โดยที่ A, B และ C เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ A, B ไม่เท่ากับศูนย์ทั้งคู่จะเรียกว่าสมการกำลังหนึ่ง หรือสมการเชิงเส้น

ทฤษฎีบท 3.9

เส้นตรงทุกเส้นสามารถเขียนแทนด้วยสมการในรูป $Ax + By + C = 0$

ตัวอย่าง 3.24 จงหาความชัน m และระยะตัดแกน y ของสมการ $4x - 12y - 15 = 0$

วิธีทำ จัดสมการที่โจทย์กำหนดให้อยู่ในรูป $y = mx + b$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad 4x - 12y - 15 &= 0 \\ -12y &= -4x + 15 \\ y &= \frac{-4x + 15}{-12} \\ y &= \frac{-4x}{-12} + \frac{15}{-12} \\ y &= \frac{4x}{12} - \frac{15}{12} \\ y &= \frac{1}{3}x - \frac{15}{12} \end{aligned}$$

ดังนั้น ความชัน $m = \frac{1}{3}$ และระยะตัดแกน $y = -\frac{15}{12}$

ข้อสังเกต 3.3

จากสมการเส้นตรง $Ax + By + C = 0$ จัดรูปสมการใหม่ได้ $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ อยู่ในรูป

$y = mx + b$ นั่นคือ $m = -\frac{A}{B}$ และระยะตัดแกน $y = -\frac{C}{B}$ ดังนั้นจากตัวอย่าง 3.24 จะได้ว่า

$$m = -\frac{4}{-12} = \frac{1}{3} \quad \text{และระยะตัดแกน } y = -\frac{C}{B} = -\frac{-15}{-12} = -\frac{15}{12}$$

ตัวอย่าง 3.25 จงเขียนกราฟเส้นตรง $3x - 4y - 12 = 0$

วิธีทำ จากสมการ $3x - 4y - 12 = 0$

$$\text{เมื่อ } y = 0 \text{ จะได้ } 3x - 4(0) - 12 = 0$$

$$3x - 12 = 0$$

$$3x = 12$$

$$x = \frac{12}{3}$$

$$x = 4$$

นั่นคือจุดตัดแกน X คือ $(4, 0)$

$$\text{เมื่อ } x = 0 \text{ จะได้ } 3(0) - 4y - 12 = 0$$

$$-4y - 12 = 0$$

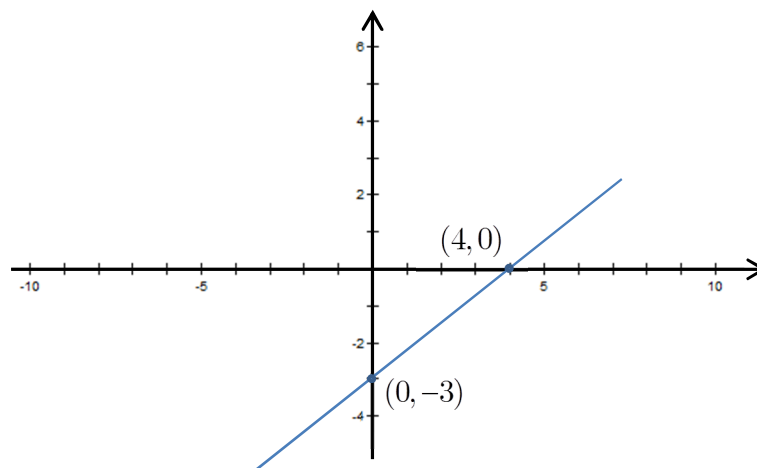
$$-4y = 12$$

$$y = \frac{12}{-4}$$

$$y = -3$$

นั่นคือจุดตัดแกน Y คือ $(0, -3)$

นำจุดตัดแกน X และจุดตัดแกน Y ไปลงจุดในระนาบพิกัดฉาก แล้วลากเส้นตรงผ่านจุดเหล่านี้แล้วจะได้กราฟเส้นตรงดังต่อไปนี้



ตัวอย่าง 3.26 จงเขียนกราฟเส้นตรง $x - 3y + 9 = 0$

วิธีทำ จากสมการ $x - 3y + 9 = 0$

$$\text{เมื่อ } y = 0 \text{ จะได้ } x - 3(0) + 9 = 0$$

$$x + 9 = 0$$

$$x = -9$$

นั่นคือจุดตัดแกน X คือ $(-9, 0)$

เมื่อ $x = 0$ จะได้ $x - 3y + 9 = 0$

$$0 - 3y + 9 = 0$$

$$-3y + 9 = 0$$

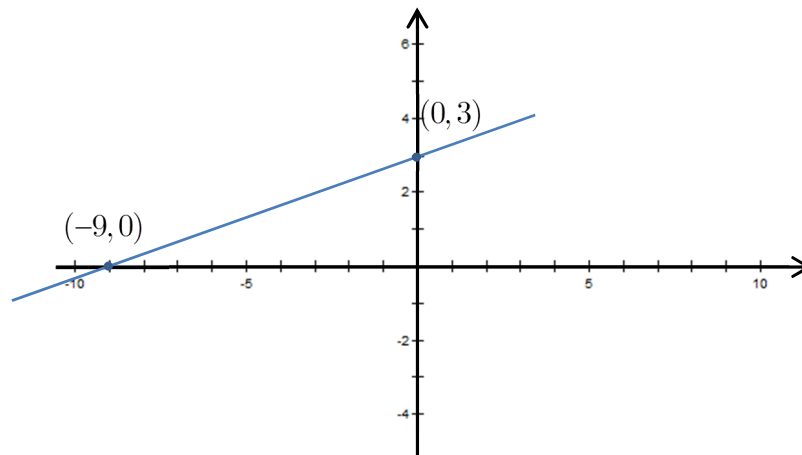
$$-3y = -9$$

$$y = \frac{-9}{-3}$$

$$y = 3$$

นั่นคือจุดตัดแกน Y คือ $(0, 3)$

นำจุดตัดแกน X และจุดตัดแกน Y ไปลงจุดในระนาบแกนพิกัดฉาก แล้วลากเส้นตรงผ่านจุดเหล่านี้แล้วจะได้กราฟเส้นตรงดังต่อไปนี้



เส้นตรงสองเส้นใด ๆ ในระบบพิกัดฉากจะขนานกันหรือไม่ก็ตัดกัน ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกันและทำมุม 90° เรากล่าวว่าเส้นตรงทั้งสองตั้งฉากกัน เส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีมุมเอียงเท่ากัน ดังนั้นความชันจึงเท่ากันด้วย (เลิศ สิทธิโชค, 2541 : 18)

ตัวอย่าง 3.27 เส้นตรง $2x + 6y - 4 = 0$ มีความสัมพันธ์กับเส้นตรงต่อไปนี้อย่างไร

$$\text{เส้นตรง } L_1 : 4x + 12y - 8 = 0$$

$$L_2 : -3x + y - 4 = 0$$

$$L_3 : x + 3y - 9 = 0$$

$$L_4 : 2x + y - 4 = 0$$

วิธีทำ จากโจทย์สมการ $2x + 6y - 4 = 0$ จัดให้อยู่ในรูป $y = mx + c$ จะได้ $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

นั่นคือเส้นตรงนี้มีค่าความชัน $m = -\frac{1}{3}$

พิจารณาเส้นตรง $L_1 : 4x + 12y - 8 = 0$

จัดให้อยู่ในรูป $y = mx + c$ จะได้ $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

เนื่องจากเส้นตรง L_1 มีสมการเหมือนกันกับสมการที่โจทย์กำหนดให้

ดังนั้น เส้นตรงทั้งสองเป็นเส้นตรงเดียวกัน

พิจารณาเส้นตรง $L_2 : -3x + y - 4 = 0$

จัดให้อยู่ในรูป $y = mx + c$ จะได้ $y = 3x + 4$

เส้นตรง L_2 มีความชัน $m_{L_2} = 3$ เมื่อนำ $m \cdot m_{L_2} = -\frac{1}{3} \cdot 3 = -1$

ดังนั้น เส้นตรง L_2 ตั้งฉากกับเส้นตรงที่กำหนดให้

พิจารณาเส้นตรง $L_3 : x + 3y - 9 = 0$

จัดให้อยู่ในรูป $y = mx + c$ จะได้ $y = -\frac{1}{3}x + 3$

เส้นตรง L_3 มีความชันเท่ากับเส้นตรงที่กำหนดให้

ดังนั้น เส้นตรง L_3 ขนานกับเส้นตรงที่กำหนดให้

พิจารณาเส้นตรง $L_4 : 2x + y - 4 = 0$

จัดให้อยู่ในรูป $y = mx + c$ จะได้ $y = -2x + 4$

เส้นตรง L_4 มีความชันเท่ากับ $m_{L_4} = -2$ ซึ่งไม่เท่ากับค่าความชันของเส้นตรงที่กำหนดให้

และผลคูณของความชันทั้งสองก็ไม่เท่ากับ -1

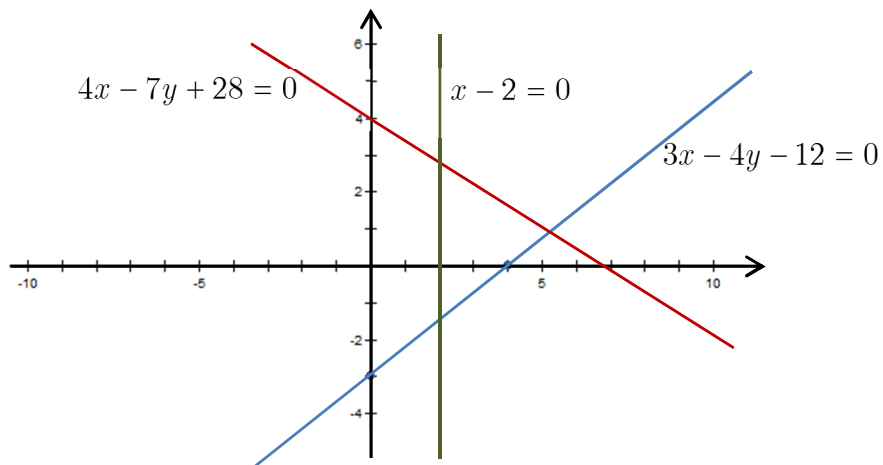
ดังนั้น เส้นตรง L_4 ตัดกันกับเส้นตรงที่กำหนดให้

3.3 ระบบสมการเส้นสองตัวแปร

สมการเชิงเส้นสองตัวแปรซึ่งได้ศึกษาในหัวข้อที่ผ่านมาแล้วนั้นหมายถึงสมการที่อยู่ในรูป $Ax + By + C = 0$ เมื่อ x และ y เป็นตัวแปร A, B, C เป็นค่าคงตัวโดยที่ A และ B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน ตัวอย่างเช่น

$$\begin{aligned}x + 2y &= 0 \\3x + 5y &= 0 \\x - 2y - 4 &= 0 \\-3x + 7y + 3 &= 0\end{aligned}$$

นอกจากนั้นเราพบว่า กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปรจะเป็นเส้นตรง จุดทุกจุดบนกราฟเส้นตรงจะสอดคล้องหรือเป็นคำตอบของสมการเชิงเส้นนั้น ตัวอย่างเช่น เส้นตรงในรูปต่อไปนี้เป็นกราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปรตามที่ระบุในกราฟ



ภาพประกอบ 3.6 แสดงกราฟของสมการเชิงเส้น

ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร หมายถึงชุดของสมการเชิงเส้นสองตัวแปรซึ่งมีสมการจำกัดตั้งแต่หนึ่งสมการขึ้นไปดังบทนิยาม (จินดา อยู่เป็นสุข, 2551 : 2)

บทนิยาม 3.8

ให้ a, b, c, d, e, f เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ a, b ไม่เป็นศูนย์พร้อมกันและ c, d ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน เรียก

$$ax + by = e$$

$$cx + dy = f$$

ว่าระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร x, y และคำตอบของระบบสมการนี้คือค่าของ x และ y ที่ทำให้สมการทั้งสองเป็นจริง

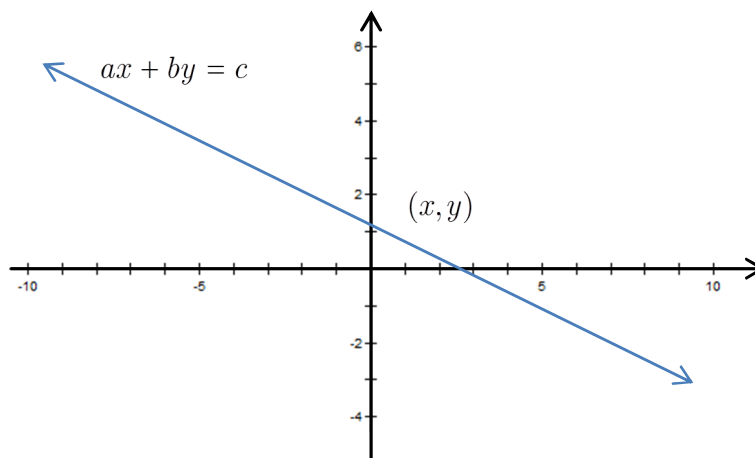
3.3.1 คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

กำหนดระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

$$(1) \quad ax + by = c$$

คำตอบของระบบสมการเชิงเส้น (1) คือ คู่อันดับ (x, y) ที่สอดคล้องกับสมการ (1) หรือกล่าวในเชิงเรขาคณิตได้ว่า คำตอบของระบบสมการเชิงเส้น (1) ได้แก่จุด (x, y) บนระนาบที่อยู่บนเส้นตรง ซึ่งเป็นกราฟของสมการ (1)

ผ่านจุดเหล่านี้แล้วจะได้กราฟเส้นตรงดังต่อไปนี้



ภาพประกอบ 3.7 แสดงคำตอบของสมการเชิงเส้น $ax + by = c$

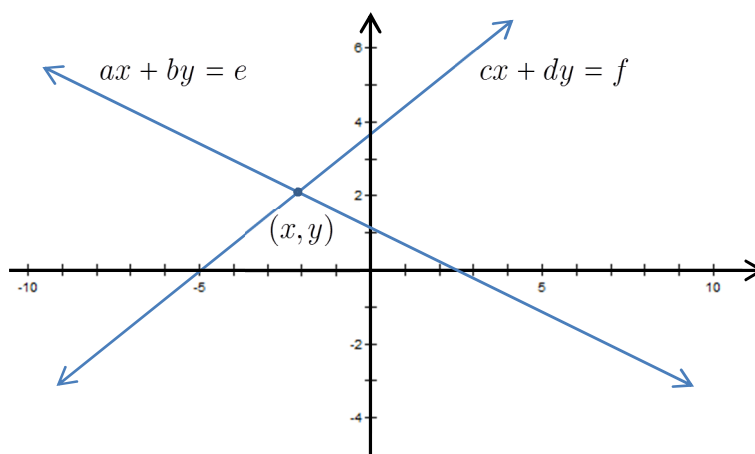
ดังนั้น คำตอบของระบบสมการเชิงเส้น (1) จึงมีมากมายเป็นอนันต์ ได้แก่ ทุกจุดทุกที่อยู่บนเส้นตรง ซึ่งเป็นกราฟของสมการ $ax + by = c$

สำหรับคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

$$(2) \quad ax + by = e$$

$$(3) \quad cx + dy = f$$

นั่นคือคู่อันดับ (x, y) ซึ่งเป็นคำตอบของสมการ (2) และสมการ (3) ของระบบสมการเชิงเส้น ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า คู่อันดับ (x, y) เป็นคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นก็ต่อเมื่อ (x, y) เป็นจุดตัดของเส้นตรงของสมการ (2) และของสมการ (3) ดังต่อไปนี้



ภาพประกอบ 3.8 แสดงคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น $ax + by = e$ และ $cx + dy = f$

ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรอาจไม่มีคำตอบ หรือมีคำตอบเดียว หรือมีหลายคำตอบก็ได้ สำหรับคำตอบของสมการเชิงเส้นมักนิยมเขียนเป็นรูปคู่อันดับ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.28 จงแก้ระบบสมการ

$$2x + y = 3$$

$$3x - 2y = 8$$

วิธีทำ

$$2x + y = 3 \quad \text{--- (1)}$$

$$3x - 2y = 8 \quad \text{--- (2)}$$

$$(2) \times 2 \quad 4x + 2y = 6 \quad \text{--- (3)}$$

$$(2) + (3) \quad 7x + 0 = 14$$

$$x = \frac{14}{7}$$

$$= 2$$

แทนค่า $x = 2$ ในสมการ (1) จะได้

$$2(2) + y = 3$$

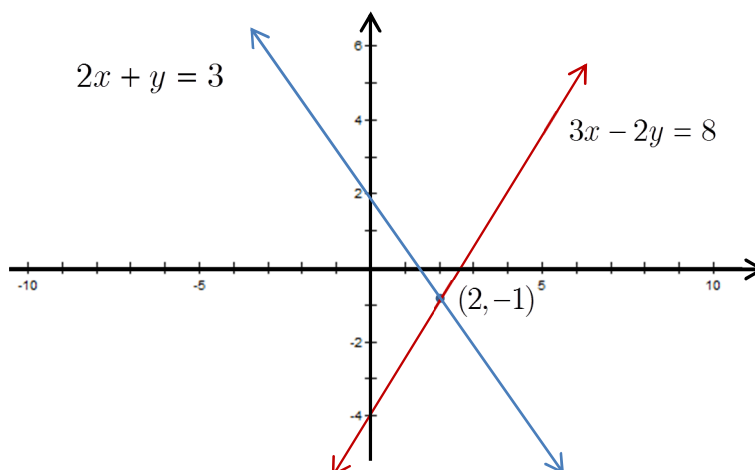
$$4 + y = 3$$

$$y = 3 - 4$$

$$y = -1$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการนี้คือ $(2, -1)$

เขียนกราฟของระบบสมการ ได้ดังนี้



จะเห็นว่ากราฟของสมการ $2x + y = 3$ และสมการ $3x - 2y = 8$ ตัดกันที่จุด $(2, -1)$

ตัวอย่าง 3.29 จงแก้ระบบสมการ

$$4x + 2y = 1$$

$$6x + 3y = 4$$

วิธีทำ

$$4x + 2y = 1 \quad \text{--- (1)}$$

$$6x + 3y = 4 \quad \text{--- (2)}$$

$$(1) \times 3 \quad 12x + 6y = 3 \quad \text{--- (3)}$$

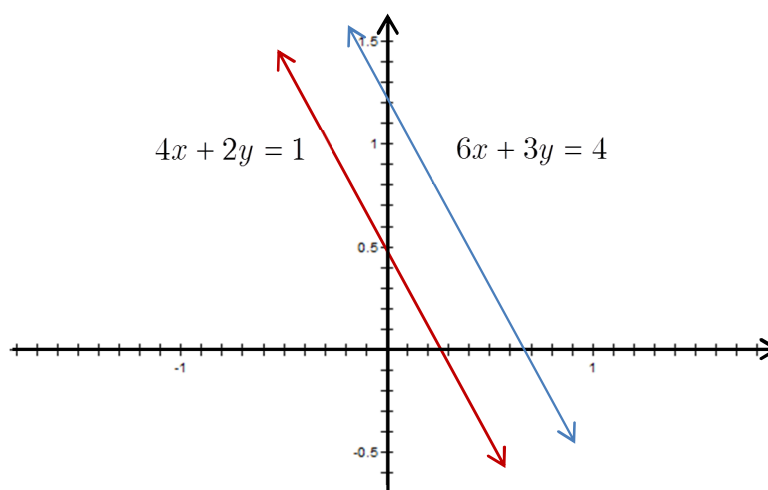
$$(2) \times 2 \quad 12x + 6y = 8 \quad \text{--- (4)}$$

$$(4) - (3) \quad 0 = 5 \text{ เป็นเท็จ}$$

นั่นคือไม่มีค่าของ x และ y ที่ทำให้สมการ (1) และ (2) เป็นจริงพร้อมกัน

ดังนั้น ระบบสมการที่กำหนดให้ไม่มีคำตอบ

เขียนกราฟของระบบสมการ ได้ดังนี้



จะเห็นว่ากราฟของสมการ $4x + 2y = 1$ และสมการ $6x + 3y = 4$ ขนานกัน

ตัวอย่าง 3.30 จงแก้ระบบสมการ

$$2x - 3y = 4$$

$$-4x + 6y = -8$$

วิธีทำ

$$2x - 3y = 4 \quad \text{--- (1)}$$

$$-4x + 6y = -8 \quad \text{--- (2)}$$

$$(1) \times 2 \quad 4x - 6y = 8 \quad \text{--- (3)}$$

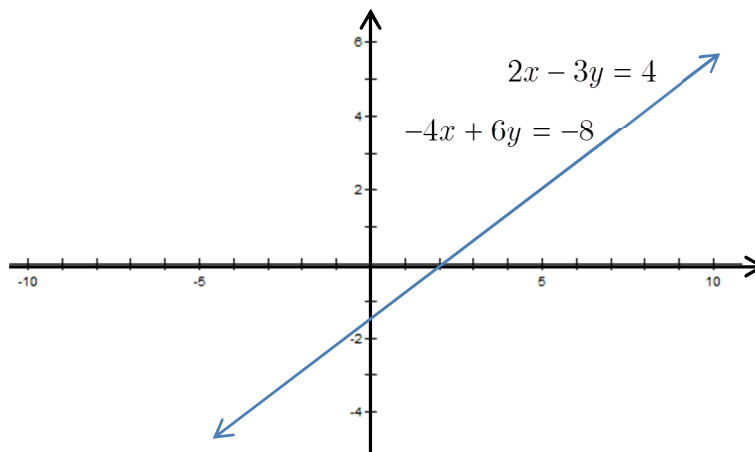
$$(2) + (3) \quad 0 = 0$$

นั่นคือไม่ว่าจะแทนค่า x และ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ ก็ตามก็จะทำให้สมการ (1) และ (2)

เป็นจริง

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้นนี้จึงมีคำตอบมากมายเป็นอนันต์

เขียนกราฟของระบบสมการ ได้ดังนี้



จะเห็นว่ากราฟของสมการ $2x - 3y = 4$ และสมการ $-4x + 6y = -8$ เป็นเส้นตรง

เดียวกัน

จากตัวอย่างที่ผ่านมาระบบของสมการ 2 สมการ ที่มีตัวแปร 2 ตัว ซึ่งมีรูปแบบทั่วไป ดังนี้ (อำพล ธรรมเจริญ และอุบลวรรณ เงินวิจิตร, 2541 : 56-57)

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

เมื่อกำหนด x, y เป็นตัวแปร และ A_1, B_1, C_1, A_2, B_2 และ C_2 เป็นค่าคงตัวในระนาบ 2

มิติเส้นตรง 2 เส้น มีความสัมพันธ์เป็นไปได้ 3 กรณีคือ

1. ตัดกันเพียงจุดเดียว ในกรณีนี้มีคำตอบเดียว
2. ขนานกัน ในกรณีนี้ไม่มีคำตอบ
3. กราฟของสมการเป็นเส้นเดียวกัน ในกรณีนี้มีเซตคำตอบเป็นเซตอนันต์

ระบบสมการเส้นสองตัวแปรนั้นอาจมีคำตอบหรือไม่มีคำตอบก็ได้และถ้ามีคำตอบแล้วอาจมีเพียงคำตอบเดียวหรือมากกว่าหนึ่งคำตอบก็ได้ และสำหรับการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรนั้นสามารถทำได้หลายวิธีซึ่งดังที่แสดงดังตัวอย่างที่ผ่านมาแล้วนั้น เป็นการหาโดยใช้กราฟ และใช้สมบัติทางพีชคณิตแต่จะเห็นว่าการใช้กราฟในการหาเฉลยนั้นเหมาะสำหรับระบบสมการเชิงเส้นบางระบบที่สามารถเห็นจุดตัดของกราฟได้อย่างชัดเจนและแม่นยำ หากเป็นระบบสมการเชิงเส้นที่ยู่ยาก การใช้กราฟในการหาคำตอบก็จะทำได้ยาก ดังนั้นการหาผลเฉลยของระบบสมการที่ง่ายที่สุดคือการใช้สมบัติทางพีชคณิตโดยไม่ต้องใช้กราฟแต่ใช้สมบัติต่าง ๆ ทางพีชคณิตโดยในที่นี้จะใช้ 2 วิธีคือวิธีกำจัดตัวแปรและวิธีการแทนค่าดังจะแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.31 จงแก้ระบบสมการ

$$x - 2y = 9$$

$$4x - 3y = 6$$

วิธีทำ โดยวิธีการกำจัดตัวแปร

$$x - 2y = 9 \quad \text{--- (1)}$$

$$4x - 3y = 6 \quad \text{--- (2)}$$

$$(1) \times 4 \quad 4x - 8y = 36 \quad \text{--- (3)}$$

$$(2) - (3) \quad 5y = -30$$

$$y = -\frac{30}{5}$$

$$= -6$$

แทนค่า $y = -6$ ในสมการ (1) จะได้

$$x - 2(-6) = 9$$

$$x + 12 = 9$$

$$x = 9 - 12$$

$$x = -3$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการนี้คือ $(-3, -6)$

วิธีทำ โดยวิธีการแทนค่า

$$x - 2y = 9 \quad \text{--- (1)}$$

$$4x - 3y = 6 \quad \text{--- (2)}$$

จากสมการ (1) จะได้

$$x = 9 + 2y$$

แทนค่าในสมการ (2) จะได้

$$4(9 + 2y) - 3y = 6$$

$$36 + 8y - 3y = 6$$

$$36 + 5y = 6$$

$$5y = 6 - 36$$

$$5y = -30$$

$$y = -\frac{30}{5}$$

$$y = -6$$

แทนค่า $y = -6$ ในสมการ (1) จะได้

$$x - 2(-6) = 9$$

$$x + 12 = 9$$

$$x = 9 - 12$$

$$x = -3$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการนี้คือ $(-3, -6)$

ตัวอย่าง 3.31 จงแก้ระบบสมการ

$$3x - 2y = 8$$

$$2x + 5y = -1$$

วิธีทำ โดยวิธีการกำจัดตัวแปร

$$3x - 2y = 8 \quad \text{--- (1)}$$

$$2x + 5y = -1 \quad \text{--- (2)}$$

$$(1) \times 5 \quad 15x - 10y = 40 \quad \text{--- (3)}$$

$$(2) \times 2 \quad 4x - 10y = -2 \quad \text{--- (4)}$$

$$(3) + (4) \quad 19x = 38$$

$$x = \frac{38}{19}$$

$$= 2$$

แทนค่า $x = 2$ ในสมการ (1) จะได้

$$3(2) - 2y = 8$$

$$6 - 2y = 8$$

$$-2y = 8 - 6$$

$$-2y = 2$$

$$y = \frac{2}{-2}$$

$$y = -1$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการนี้คือ $(2, -1)$

วิธีทำ โดยวิธีการแทนค่า

$$3x - 2y = 8 \quad \text{--- (1)}$$

$$2x + 5y = -1 \quad \text{--- (2)}$$

จากสมการ (1) จะได้

$$3x - 2y = 8$$

$$3x = 8 + 2y$$

$$x = \frac{8 + 2y}{3}$$

แทนค่าในสมการ (2) จะได้

$$2\left(\frac{8 + 2y}{3}\right) + 5y = -1$$

$$\frac{16 + 4y}{3} + 5y = -1$$

$$\frac{16 + 4y}{3} + \frac{15y}{3} = -1$$

$$\frac{16 + 4y + 15y}{3} = -1$$

$$16 + 4y + 15y = -3$$

$$16 + 19y = -3$$

$$19y = -3 - 16$$

$$19y = -19$$

$$y = -\frac{19}{19}$$

$$y = -1$$

แทนค่า $y = -1$ ในสมการ (1) จะได้

$$3x - 2(-1) = 8$$

$$3x + 2 = 8$$

$$3x = 8 - 2$$

$$3x = 6$$

$$x = \frac{6}{3}$$

$$x = 2$$

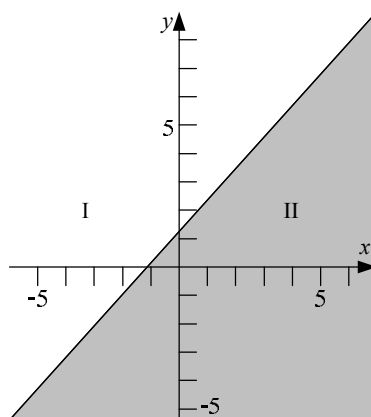
ดังนั้น คำตอบของระบบสมการนี้คือ $(2, -1)$

3.4 กราฟอสมการเส้นตรงสองตัวแปร

อสมการเชิงเส้นสองตัวแปร จะสามารถเขียนในรูปแบบต่อไปนี้ (กานดา ลือสุทธีวิบูลย์และ
ยุพิน จิรสุขานนท์, 2544 : 172-173)

$$\begin{array}{ll} ax + by < c & \text{และ} \quad ax + by \leq c \\ ax + by > c & \text{และ} \quad ax + by \geq c \end{array}$$

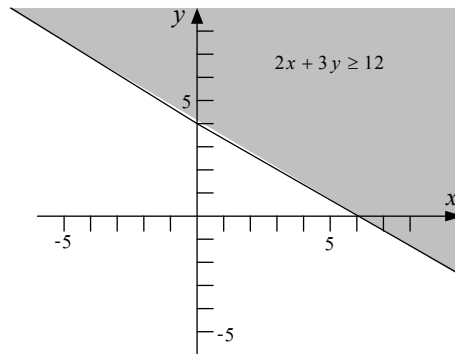
เมื่อ a, b และ c เป็นค่าคงตัว ในการเขียนกราฟของอสมการเชิงเส้นจะเขียนทำนองเดียวกัน
กับกราฟของสมการเชิงเส้นในหัวข้อที่ผ่านมา และพิจารณากราฟของเส้นตรงใด ๆ จะแบ่งระนาบ
ออกเป็น 3 ส่วน หรือ 3 บริเวณ ดังภาพประกอบส่วนที่ I และส่วนที่ II จะเรียกว่า ครึ่งระนาบ อีก
ส่วนหนึ่งคือเส้นตรงเรียกว่า ขอบ (ครึ่งระนาบ 2 ส่วนและเส้นตรงอีก 1 ส่วนรวมเป็นสามส่วน) ดัง
ภาพประกอบ



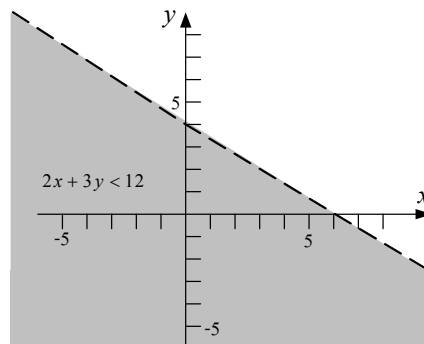
ภาพประกอบ 3.11 แบ่งระนาบออกเป็น 3 ส่วน

ที่มา : พลอนันต์แสงประสิทธิ์. 2554 : 12

ถ้าระนาบใดรวมเส้นขอบเข้าไปด้วยจะเรียกว่าครึ่งระนาบนั่นว่าครึ่งระนาบปิด และเรียกครึ่งระนาบที่ไม่รวมเส้นขอบเข้าไปด้วยเรียกว่าครึ่งระนาบเปิดกราฟของอสมการจะเป็นครึ่งระนาบปิดถ้าอสมการมีเครื่องหมายเท่ากับ และเป็นครึ่งระนาบเปิดถ้าไม่มีเครื่องหมายเท่ากับดังภาพประกอบ



ภาพประกอบ 3.9 ครึ่งระนาบปิด $2x + 3y \geq 12$



ภาพประกอบ 3.10 ครึ่งระนาบเปิด $2x + 3y < 12$

จากรูปจะเห็นว่าสมการเชิงเส้นจะสัมพันธ์กับสมการที่เป็นขอบของครึ่งระนาบในการเขียนกราฟของอสมการทำดังนี้

- ขั้นที่ 1 เขียนกราฟของสมการซึ่งเป็นเส้นขอบก่อน ถ้าอสมการมีเครื่องหมายเท่ากับ(=) ให้เขียนเป็นเส้นทึบ ถ้าไม่มีเครื่องหมายเท่ากับเขียนเป็นเส้นประ
- ขั้นที่ 2 ใช้จุดที่ไม่อยู่บนเส้นขอบเป็นจุดตรวจสอบ จุดที่ง่ายที่สุดคือจุดกำเนิด (0,0) ถ้าจุดตรวจสอบสอดคล้องกับอสมการแสดงว่าครึ่งระนาบที่จุดตรวจสอบอยู่เป็นครึ่งระนาบที่ต้องการ แต่ถ้าจุดตรวจสอบไม่สอดคล้อง กับอสมการแสดงว่าครึ่งระนาบที่อยู่ตรงข้ามจุดตรวจสอบนั้นเป็นครึ่งระนาบที่ต้องการ
- ขั้นที่ 3 แรเงาครึ่งระนาบที่ได้จากขั้นที่ 2

ตัวอย่าง 3.32 จงเขียนกราฟของ $5x + 2y - 10 \leq 0$

วิธีทำ ขั้นที่ 1 เขียนกราฟของเส้นขอบ คือ $5x + 2y - 10 = 0$

หาจุดตัดแกน y ให้ $x = 0$

$$5(0) + 2y - 10 = 0$$

$$2y - 10 = 0$$

$$2y = 10$$

$$y = 5$$

จุดตัดแกน y มีพิกัด $(0, 5)$

หาจุดตัดแกน x ให้ $y = 0$

$$5x + 2(0) - 10 = 0$$

$$5x - 10 = 0$$

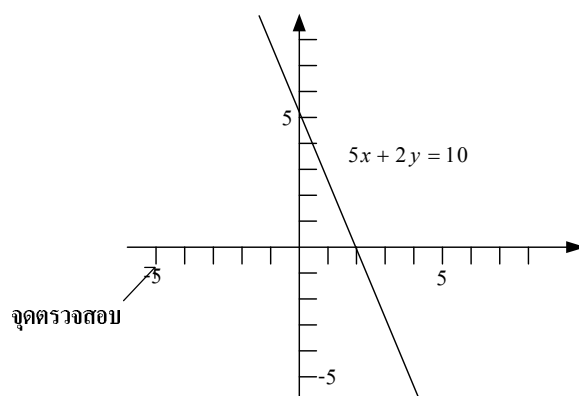
$$5x = 10$$

$$x = 2$$

จุดตัดแกน x มีพิกัด $(2, 0)$

เนื่องจากอสมการที่กำหนดให้เป็นเครื่องหมาย $\leq$ จึงเขียนเส้นเป็นเส้นทึบ ดังภาพ

ประกอบ



ขั้นที่ 2 ใช้จุด $(0, 0)$ ตรวจสอบ อสมการ $5x + 2y - 10 \leq 0$

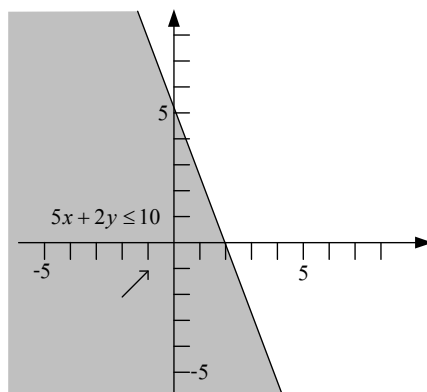
$$5(0) + 2(0) - 10 \leq 0$$

$$0 + 0 - 10 \leq 0$$

$$-10 \leq 0$$

เป็นจริง

ขั้นที่ 3 แรเงาครึ่งระนาบที่จุด $(0, 0)$ อยู่จะได้กราฟของอสมการ $5x + 2y - 10 \leq 0$ ดังภาพประกอบ



ตัวอย่าง 3.33 จงเขียนกราฟของ $y > -2x + 6$

วิธีทำ ขั้นที่ 1 เขียนกราฟของเส้นขอบ $y = -2x + 6$

หาจุดตัดแกน y ให้ $x = 0$

$$y = -2x + 6$$

$$y = -2(0) + 6$$

$$y = 6$$

จุดตัดแกน y มีพิกัด $(0, 6)$

หาจุดตัดแกน x ให้ $y = 0$

$$y = -2x + 6$$

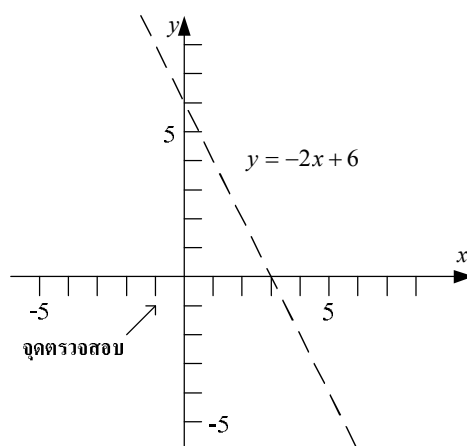
$$0 = -2x + 6$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

จุดตัดแกน x มีพิกัด $(3, 0)$

เนื่องจากอสมการที่กำหนดเป็นเครื่องหมาย $>$ จึงเขียนเส้นประดังภาพประกอบ



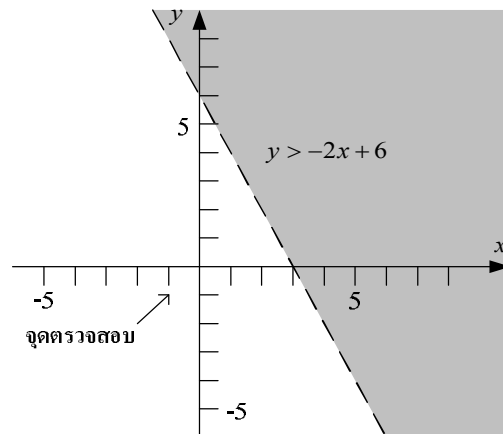
ขั้นที่ 2 ใช้จุด $(0,0)$ ตรวจสอบ อสมการ $y > -2x + 6$

$$0 > -2(0) + 6$$

$$0 > 6$$

เป็นเท็จ

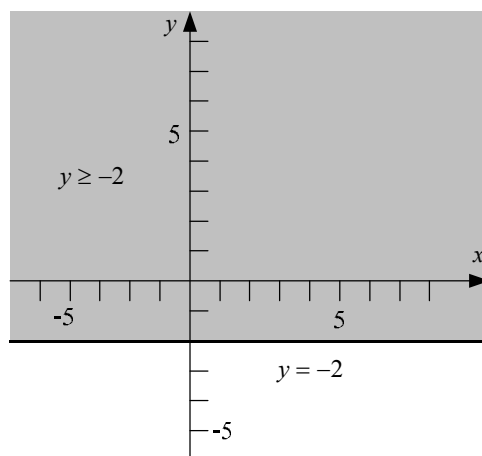
ขั้นที่ 3 แรเงาครึ่งระนาบที่อยู่ตรงข้ามจุด $(0,0)$ อยู่จะได้กราฟของอสมการ $y > -2x + 6$
ดังภาพประกอบ



ตัวอย่าง 3.34 จงเขียนกราฟของ $y \geq -2$

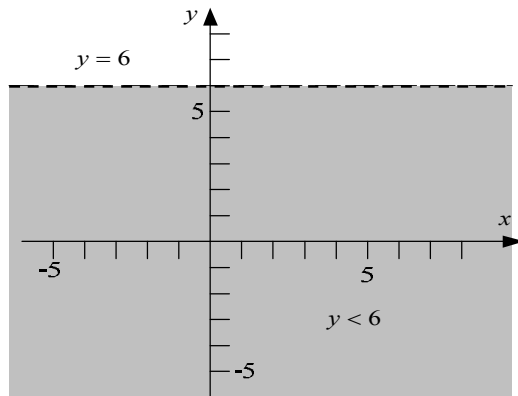
วิธีทำ เขียนกราฟของเส้นขอบ $y = -2$ เป็นเส้นทึบขนานแกน x

และ กราฟ $y \geq -2$ จึงเป็นบริเวณเหนือเส้น $y = -2$ ดังภาพประกอบ



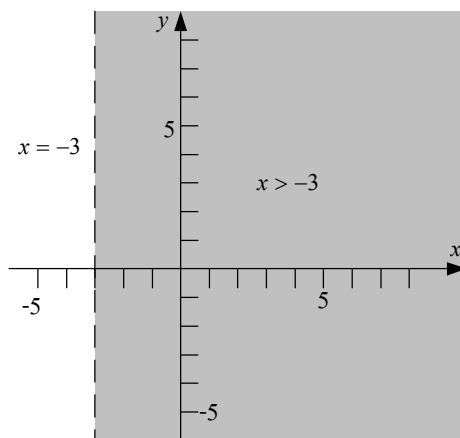
ตัวอย่าง 3.35 จงเขียนกราฟของ $y < 6$

วิธีทำ เขียนกราฟของเส้นขอบ $y = 6$ เป็นเส้นปะขนานแกน x
และ กราฟ $y < 6$ จึงเป็นบริเวณใต้เส้น $y = 6$ ดังภาพประกอบ



ตัวอย่าง 3.36 จงเขียนกราฟของ $x > -3$

วิธีทำ เขียนกราฟของเส้นขอบ $x = -3$ เป็นเส้นปะขนานแกน y
และ กราฟ $x > -3$ ผังขวาของของเส้น $x = -3$ ดังภาพประกอบ



สรุปท้ายบทที่ 3

สำหรับเนื้อหาในบทนี้ผู้เขียนได้เรียบเรียงเนื้อหาตั้งแต่การลงพิกัดใน 4 จตุภาค การหา $\overline{AB}$ เมื่อกำหนดจุด A และ B เมื่อกำหนดจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุดสองจุดใด ๆ ที่ต่างกัน สามารถหาระยะทางระหว่างจุดทั้งสองได้เมื่อกำหนดจุดสองจุดแล้วสามารถหาความชันของเส้นตรง รวมทั้งสามารถใช้ทฤษฎีบทการหาความชันของเส้นตรงไปประยุกต์นำไปใช้ในเรื่องที่เกี่ยวข้องได้ ตรวจสอบเส้นสองเส้นเป็นเส้นขนานหรือเส้นตั้งฉากพร้อมทั้งสามารถประยุกต์เส้นขนานและเส้นตั้งฉากกับเรื่องที่เกี่ยวข้องได้ การวาดกราฟของสมการเส้นตรงและอธิบายกราฟของสมการที่อยู่ในรูป $Ax + By + C = 0$ โดยที่ A, B และ C เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ A, B ไม่เท่ากับศูนย์ทั้งคู่

อธิบายลักษณะของระบบสมการเส้นสองตัวแปรได้ เพื่อนำไปหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรได้ และสามารถวาดกราฟอสมการเส้นตรงสองตัวแปรได้เพื่อนำไปแก้ปัญหาเบื้องต้นได้

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3

1. จงหา $\overline{AB}$ เมื่อกำหนดจุด A และ B ดังต่อไปนี้
 - 1.1 $A(3,2)$ และ $B(8,2)$
 - 1.2 $A(-2,2)$ และ $B(4,2)$
 - 1.3 $A(-3,1)$ และ $B(-8,1)$
 - 1.4 $A(-2,1)$ และ $B(-2,6)$
 - 1.5 $A(2,-3)$ และ $B(2,-6)$
2. จงหา $|AB|$ เมื่อกำหนดจุด A และ B ดังต่อไปนี้
 - 1.1 $A(1,2)$ และ $B(3,-2)$
 - 1.2 $A(-2,-2)$ และ $B(3,9)$
 - 1.3 $A(-3,1)$ และ $B(-2,5)$
 - 1.4 $A(6,1)$ และ $B(-2,6)$
 - 1.5 $A(-2,-3)$ และ $B(2,-6)$
3. วงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0,-3)$ ถ้าวงกลมวงนี้ผ่านจุด $(3,5)$ จงหารัศมีของวงกลม
4. จุด A เป็นจุดบนแกน Y ซึ่งห่างจากจุด $(1,1)$ กับ $(-4,6)$ เป็นระยะเท่ากัน จงหาพิกัดจุด A
5. จงหาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้
 - 5.1 $A(1,2)$ และ $B(3,-2)$
 - 5.2 $A(-2,-2)$ และ $B(3,9)$
 - 5.3 $A(-3,1)$ และ $B(-2,5)$
 - 5.4 $A(6,1)$ และ $B(-2,6)$
 - 5.5 $A(-2,-3)$ และ $B(2,-6)$
6. จงใช้ความรู้เรื่องความชันแสดงให้เห็นว่าจุดสามจุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นจุดมุมของสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่
 - 6.1 $A(1,3), B(5,-7)$ และ $C(6,5)$
 - 6.2 $A(1,-2), B(3,2)$ และ $C(2,6)$
 - 6.3 $A(-2,-1), B(3,4)$ และ $C(4,1)$

7. จงตรวจสอบดูว่า เส้นตรงที่ผ่านจุด A และ B จะตั้งฉากหรือขนานกับเส้นตรงที่ผ่านจุด P และ Q หรือไม่เพราะเหตุใด

7.1 $A(3, -1), B(-5, 2)$ และ $P(4, 2), Q(12, 1)$

7.2 $A(4, 8), B(12, 8)$ และ $P(-6, 1), Q(3, 1)$

7.3 $A(-5, 1), B(2, -3)$ และ $P(0, -2), Q(4, 5)$

7.4 $A(0, 3), B(7, -1)$ และ $P(-5, 1), Q(2, -3)$

8. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-1, 3)$ และมีความชันเท่ากับ $\frac{1}{3}$

9. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(0, -2)$ และมีความชันเท่ากับ 5

10. จงหาความสมการเส้นตรงที่ผ่านจุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้

10.1 $A(1, 2)$ และ $B(3, -2)$

10.2 $A(-2, -2)$ และ $B(3, 9)$

10.3 $A(-3, 1)$ และ $B(-2, 5)$

10.4 $A(6, 1)$ และ $B(-2, 6)$

10.5 $A(-2, -3)$ และ $B(2, -6)$

11. จงหาระยะตัดแกน x และระยะตัดแกน y สมการเส้นตรง $2x - 3y + 12 = 0$

12. จงหาสมการเส้นตรงที่มีจุดตัดแกนคือ $(3, 0)$ และ $(0, -7)$

13. จงเขียนกราฟสมการเส้นตรงที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้

13.1 $3x - 4y - 12 = 0$

13.2 $x - 4y + 12 = 0$

13.3 $2x + 3y - 18 = 0$

13.4 $x - y - 5 = 0$

14. จงหาคำตอบของระบบสมการต่อไปนี้

14.1 $9x + 3y = 12$ และ $3x + 2y = 5$

14.2 $2x + 3y = -1$ และ $3x - 2y = 5$

14.3 $3x + 2y = 1$ และ $6x + 4y = 2$

14.4 $12x - 5y = 34$ และ $y - 2x = 6$

14.5 $2x - 3y - 6 = 0$ และ $3x - 5y - 8 = 0$

15. จงเขียนกราฟของอสมการต่อไปนี้

15.1 $y \geq 2x - 3$

15.2 $x - y > 3$

15.3 $x - 3y \geq 12$

15.4 $3x + y < 4$

15.5 $y \leq 2x + 5$

เอกสารอ้างอิง

กานดา ลือสุทธีวิบูลย์และยุพิน จิรสุขานนท์. (2544). **สรุปคณิตศาสตร์ม.ปลาย**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์เดอะบุคส์

จินดา อยู่เป็นสุข. (2551). **คณิตศาสตร์เพิ่มเติมเล่ม 2 ม.4-6**. กรุงเทพมหานคร : ภูมิบัณฑิตการพิมพ์.
พลอนันต์แสงประสิทธิ์. (2554). **คณิตศาสตร์ม.ปลาย**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์เดอะบุคส์

ภัทรา เตชาภิวาทย์. (2540). **เรขาคณิตวิเคราะห์**. กรุงเทพมหานคร : มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

เลิศ สิทธิโกศล. (2541). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1**. กรุงเทพมหานคร : สกายบุคส์.

อำพล ธรรมเจริญ และอุบลวรรณา เงินจิตร. (2541). **คณิตศาสตร์ไฟไนต์**. กรุงเทพฯ : แมคกรอ-ฮิล
อินเตอร์เนชันแนล เอ็นเตอร์ไพรส์, อิงค์

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 4

เนื้อหาประจำบท

1. ความสัมพันธ์
2. ความสัมพันธ์ผกผัน
3. ฟังก์ชัน
4. ชนิดของฟังก์ชัน
5. ฟังก์ชันผกผัน
6. ฟังก์ชันประกอบ
7. พิษคณิตของฟังก์ชัน

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เมื่อกำหนด (a, b) แล้วสามารถแยกส่วนประกอบที่หนึ่งและส่วนประกอบที่สองได้
2. เมื่อกำหนดเซต A และ B แล้วสามารถหา $A \times B$ ได้
3. สามารถหาให้ความหมายและอธิบายความสัมพันธ์ต่าง ๆ ได้
4. สามารถโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ได้
5. สามารถหาความสัมพันธ์ผกผันได้
6. สามารถให้ความหมายและแยกแยะความสัมพันธ์ต่าง ๆ ที่กำหนดให้มาเป็นฟังก์ชันหรือไม่
7. สามารถอธิบายและให้ความหมายพร้อมทั้งยกตัวอย่างฟังก์ชันทั่วถึงได้
8. สามารถอธิบายและให้ความหมายพร้อมทั้งยกตัวอย่างฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งได้
9. สามารถอธิบายและให้ความหมายพร้อมทั้งยกตัวอย่างฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึงได้
10. สามารถหาฟังก์ชันผกผันได้
11. เมื่อกำหนดฟังก์ชันใด ๆ มาให้แล้วสามารถหาฟังก์ชันประกอบและพิษคณิตของฟังก์ชันได้

วิธีการสอนและกิจกรรมการเรียนรู้การสอนประจำบท

1. ผู้สอนบรรยายหัวข้อต่อไปนี้พร้อมเปิดโอกาสให้ซักถาม
 - 1.1 ความสัมพันธ์
 - 1.2 ความสัมพันธ์ผกผัน
 - 1.3 ฟังก์ชัน
 - 1.4 ชนิดของฟังก์ชัน
 - 1.5 ฟังก์ชันผกผัน
 - 1.6 ฟังก์ชันประกอบ
 - 1.7 พิษคณิตของฟังก์ชัน

2. ให้นักศึกษาทำกิจกรรมต่อไปนี้

- 2.1 ศึกษาข้อมูล เกี่ยวกับเรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชันเพิ่มเติม
- 2.2 ทำแบบฝึกหัดที่กำหนดให้

สื่อการเรียนการสอน

- 1. เอกสารประกอบการสอนและตำราต่าง ๆ
- 2. Slide Presentation

การวัดผลและการประเมินผล

- 1. สังเกตความสนใจของนักศึกษาขณะสอน ความตั้งใจ การฟัง การจดบันทึก และการซักถาม
- 2. แบบฝึกหัด
- 3. แบบทดสอบ
- 4. การมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอน

บทที่ 4

ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

ความสัมพันธ์และฟังก์ชันนับเป็นเนื้อหาที่สำคัญในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์โดยใช้พื้นฐานจากการเรียนเรื่อง เซต สมการ อสมการ และความสัมพันธ์ต่าง ๆ มีการนำความรู้เรื่องนี้ไปใช้อย่างกว้างขวาง ประยุกต์ใช้ในการทำงานหลากหลายสาขาวิชา ทั้งทางด้านพาณิชยศาสตร์ด้านวิศวกรรม ด้านคอมพิวเตอร์ ฯลฯ นอกจากนี้ยังเป็นพื้นฐานการเรียนคณิตศาสตร์ขั้นสูงในเรื่องอื่น ๆ เช่น ฟังก์ชันตรีโกณมิติฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียล ฟังก์ชันลอการิธึม แคลคูลัส เป็นต้น จึงเป็นเรื่องปกติที่ความรู้เรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชันจะถูกนำมาเป็นเรื่องพื้นฐานในหลายวิชา และเป็นเนื้อเรื่องในหลักสูตรหลากหลายสาขาวิชา เมื่อเข้าใจเนื้อหาพื้นฐานในเรื่องนี้เป็นอย่างดีแล้ว จึงนำไปประยุกต์ให้ตรงกับสายวิชาชีพ เช่น การเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อหาผลลัพธ์ที่ต้องการจำเป็นต้องใช้สมการที่อยู่ในรูปของฟังก์ชัน หรือวิศวกรที่ทำงานทางด้านคลื่นเสียง คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า พฤติกรรมของคลื่นชนิดต่าง ๆ จะศึกษากราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นต้น สำหรับบทนี้จะแบ่งออกเป็น 7 เรื่อง คือ ความสัมพันธ์ ความสัมพันธ์ผกผัน ฟังก์ชัน ชนิดของฟังก์ชัน ฟังก์ชันผกผัน ฟังก์ชันประกอบ พิกัดของฟังก์ชัน ดังนี้

ก่อนที่จะกล่าวถึงความสัมพันธ์ และฟังก์ชันนั้น เราจะต้องศึกษาบทนิยามต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง เพื่อเป็นข้อตกลงในการศึกษาเนื้อหาที่จะกล่าวถึงดังนี้ (ศุภกิจ เณลิมวิสุตม์กุล, 2553 : 84-88)

บทนิยาม 4.1

สำหรับ a และ b ซึ่งเป็นจำนวนจริงใด ๆ คู่อันดับ a, b เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ (a, b) เรียก a ว่าส่วนประกอบที่หนึ่งและเรียก b ว่าส่วนประกอบที่สอง

ตัวอย่าง 4.1 คู่อันดับ $(2, -3)$

มี 2 เป็นส่วนประกอบที่หนึ่ง
และ -3 เป็นส่วนประกอบที่สอง

บทนิยาม 4.2

สำหรับจำนวนจริง a, b, c และ d ใด ๆ เรากล่าวว่าคู่อันดับ (a, b) และ (c, d) เท่ากันซึ่งแทนด้วย $(a, b) = (c, d)$ นิยามโดย $(a, b) = (c, d)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

ข้อสังเกต 4.1

สำหรับ $a, b \in R$ ถ้า $a \neq b$ แล้ว $(a, b) \neq (b, a)$

ตัวอย่าง 4.2 คู่อันดับ $(x+1, 3) = (6, y-4)$

$$\begin{array}{ll} \text{จะได้ } x+1 = 6 & \text{และ } y-4 = 3 \\ x = 5 & \text{และ } y = 7 \end{array}$$

บทนิยาม 4.3

ถ้า A และ B เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง ผลคูณคาร์ทีเซียนของ A และ B ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \times B$ หมายถึงเซตที่ประกอบด้วยคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x \in A$ และ $y \in B$ นั่นคือ $A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ และ } y \in B\}$

ตัวอย่าง 4.3 กำหนดให้ $A = \{a, b\}$ และ $B = \{1, 2, 3\}$

จากบทนิยาม 1.22 จะได้

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

$$B \times A = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

สังเกตว่า $(a, 1) \in A \times B$ แต่ $(a, 1) \notin B \times A$

ข้อสังเกต 4.2

จากตัวอย่าง 4.3 จะได้ว่า $A \times B \neq B \times A$ ในกรณีทั่ว ๆ ไปถ้า $A \neq B$ แล้ว

$$A \times B \neq B \times A$$

4.1 ความสัมพันธ์

ประโยค ต่อไปนี้ “ $x = y$ ” “น้อยเป็นพี่สาวของนาง” “3 มากกว่า 5.” เป็นตัวอย่างของความสัมพันธ์ซึ่งจะเห็นว่าความสัมพันธ์นั้นเกี่ยวข้องกับของสองสิ่ง (ซึ่งอาจจะเหมือนกัน เท่ากัน หรือต่างกัน) สมการหรือสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน x และ y ใด ๆ ก็เป็นตัวอย่างความสัมพันธ์เช่นเดียวกัน ดังบทนิยามต่อไปนี้ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2546 : 122-125)

บทนิยาม 4.4

ถ้า r เป็นเซตย่อยของ $A \times B$ เราจะเรียก r ว่าเป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B ถ้า $(x, y) \in r$ เรากล่าวว่า “ x สัมพันธ์ r กับ y ”

ตัวอย่าง 4.4 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{1, 2, 3, 4\}$

1. จงหาความสัมพันธ์ น้อยกว่า จาก A ไปยัง B
2. จงหาความสัมพันธ์ เท่ากับ จาก A ไปยัง B

ให้ r_1 เป็นความสัมพันธ์ น้อยกว่า จาก A ไปยัง B

$$\text{ดังนั้น } r_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$$

ให้ r_2 เป็นความสัมพันธ์ เท่ากับ จาก A ไปยัง B

$$\text{ดังนั้น } r_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

บทนิยาม 4.5

ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง A จะเรียก r เป็นความสัมพันธ์ใน A

ตัวอย่าง 4.5 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$$\text{และ } r = \{(x, y) : x, y \in A, x > y\}$$

$$\text{ดังนั้น } r = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\} \text{ เป็นความสัมพันธ์ใน } A$$

บทนิยาม 4.6

กำหนดให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก จาก A ไปยัง B

โดเมนของความสัมพันธ์ r หมายถึงเซตของส่วนประกอบที่หนึ่งของคู่อันดับ
ที่อยู่ใน r เขียนแทนด้วย D_r

$$\text{นั่นคือ } D_r = \{x : x \in A \text{ จะมี } y \text{ บางตัวใน } B \text{ ที่ทำให้ } (x, y) \in r\}$$

เรนจ์ ของความสัมพันธ์ r หมายถึงเซตของส่วนประกอบที่สองของคู่อันดับ
ที่อยู่ใน r เขียนแทนด้วย R_r

$$\text{นั่นคือ } R_r = \{y : y \in B \text{ จะมี } x \text{ บางตัวใน } A \text{ ที่ทำให้ } (x, y) \in r\}$$

จะเห็นว่า $D_r \subseteq A$ และ $R_r \subseteq B$

ตัวอย่าง 4.6 กำหนดให้ N เป็นเซตของจำนวนนับ

$$\text{และ } r = \{(x, y) : x, y \in N, x + 3y = 15\}$$

$$\text{ดังนั้น } r = \{(12, 1), (9, 2), (6, 3), (3, 4)\}$$

$$\text{จะได้ } D_r = \{12, 9, 6, 3\}$$

$$\text{และ } R_r = \{1, 2, 3, 4\}$$

การหาโดเมนและเรนจ์จากตัวอย่างที่กล่าวมาข้างต้น เป็นการหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ที่มีจำนวนสมาชิกจำกัดจึงทำให้สามารถหาได้ง่าย แต่ในกรณีที่เป็นความสัมพันธ์ ซึ่งมีจำนวนสมาชิกไม่จำกัด เราจะไม่สามารถใช้วิธีหาโดเมนและเรนจ์ด้วยวิธีการดังที่กล่าวได้สะดวก แต่เราจะใช้วิธีการดังต่อไปนี้

วิธีหาโดเมน เขียน y ในเทอมของ x แล้วพิจารณาค่า x เป็นจำนวนจริงอะไรได้บ้างจึงจะทำให้ค่าของ y ได้เป็นจำนวนจริง เซตของค่าของ x ทั้งหมดคือโดเมน

วิธีหาเรนจ์ เขียน x ในเทอมของ y แล้วพิจารณาค่า y เป็นจำนวนจริงอะไรได้บ้างจึงจะทำให้ค่าของ x ได้เป็นจำนวนจริง เซตของค่าของ y ทั้งหมดคือเรนจ์

ตัวอย่าง 4.7 จงหาโดเมนและเรนจ์ของ $r = \left\{ (x, y) : x, y \in R, y = \frac{1}{x-3} \right\}$

วิธีทำ พิจารณาสมการ $y = \frac{1}{x-3}$

จะเห็นว่า ถ้า $x = 3$ แล้วจะทำให้ $y = \frac{1}{0}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ดังนั้น จำนวนจริง 3 จึงไม่อยู่ในโดเมนของ r ส่วนจำนวนจริงอื่น ๆ จะอยู่ในโดเมนของ r

$$D_r = \{x : x \in R, x \neq 3\} = (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$$

$$\text{และจาก } y = \frac{1}{x-3}$$

เขียน x ในเทอมของ y ได้ดังนี้

$$y(x-3) = 1$$

$$yx - 3y = 1$$

$$xy = 1 + 3y$$

$$x = \frac{1+3y}{y}$$

จะเห็นว่าถ้า $y = 0$ แล้วจะไม่สามารถหาค่าของ x ได้ ดังนั้น

$$R_r = \{y : y \in R, y \neq 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

4.2 ความสัมพันธ์ผกผัน

กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{1, 2, 3, 4\}$ และให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B โดยกำหนดความสัมพันธ์ r ดังนี้

$$r = \{(x, y) : x \in A, y \in B, x < y\}$$

$$\text{ซึ่งจะได้ } r = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$$

$$\text{และ } D_r = \{1, 2, 3\} \text{ และ } R_r = \{2, 3, 4\}$$

ถ้าเราสลับที่กันระหว่างส่วนประกอบที่หนึ่งและส่วนประกอบที่สองของแต่ละคู่อันดับที่อยู่ใน r จะได้ความสัมพันธ์อันใหม่ สมมติให้เป็น s นั่นคือ

$s = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (3, 2), (4, 2), (4, 3)\}$ ซึ่งจะได้ว่า s เป็นความสัมพันธ์จาก B ไปยัง A ซึ่งสามารถเขียนความสัมพันธ์ s ได้ดังนี้

$$s = \{(y, x) : x \in A, y \in B, x < y\}$$

$$\text{หรือ } s = \{(x, y) : x \in B, y \in A, y < x\}$$

$$\text{จะพบว่า } D_s = \{2, 3, 4\} \text{ และ } R_s = \{1, 2, 3\}$$

เรียกความสัมพันธ์ s ที่เกิดขึ้นนี้ว่า ความสัมพันธ์ผกผันของความสัมพันธ์ r

บทนิยาม 4.7

ผกผันของความสัมพันธ์ r คือความสัมพันธ์ซึ่งเกิดจากการสลับที่กันระหว่างส่วนประกอบที่หนึ่งและส่วนประกอบที่สองของแต่ละคู่อันดับใน r เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ r^{-1} นั่นคือ $r^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in r\}$

ตัวอย่าง 4.8 กำหนด $r = \{(x, y) : x, y \in R \text{ และ } y = 5x - 2\}$ จงหา r^{-1}

วิธีทำ จากบทนิยาม 1.26 จะได้ $r^{-1} = \{(y, x) : x, y \in R \text{ และ } y = 5x - 2\}$

$$\begin{aligned} \text{หรือ} \quad r^{-1} &= \{(x, y) : x, y \in R \text{ และ } x = 5y - 2\} \\ &= \left\{ (x, y) : x, y \in R \text{ และ } y = \frac{x+2}{5} \right\} \end{aligned}$$

4.3 ฟังก์ชัน

โดยทั่วไปเราสนใจความสัมพันธ์ที่มีลักษณะพิเศษชนิดหนึ่ง ซึ่งเรียกว่าฟังก์ชัน เราอาจทำความเข้าใจอย่างง่าย ๆ ว่า จำนวน y เป็นฟังก์ชันของจำนวน x ถ้าสำหรับแต่ละ x มีวิธีการเพื่อหาค่าของ y ได้เพียงหนึ่งค่าเท่านั้นที่สมนัยกับค่าของ x เช่นสมการ $y = x - 1$ เป็นฟังก์ชัน เพราะว่าแต่ละค่าของ x จะหา y ได้เพียงหนึ่งค่าเท่านั้น ดังบทนิยามต่อไปนี้ (ปราณี เจริญฤทธิวัฒน์ และลัดดาวัลย์ เพ็ญสุภา, 2530 : 21-23)

บทนิยาม 4.8

ฟังก์ชันคือความสัมพันธ์ซึ่งสองคู่อันดับใด ๆ ที่มีส่วนประกอบที่หนึ่งเหมือนกันแล้วส่วนประกอบที่สองต้องเหมือนกันด้วย นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันก็ต่อเมื่อ f เป็นความสัมพันธ์สำหรับคู่อันดับใด ๆ (x_1, y_1) และ $(x_2, y_2) \in f$ ถ้า $x_1 = x_2$ แล้ว $y_1 = y_2$

ตัวอย่าง 4.9 กำหนด $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{x, y, z\}$

$$\text{และ } r_1 = \{(1, x), (2, y), (2, x), (3, y)\}$$

$$r_2 = \{(1, z), (2, y), (3, x)\}$$

$$r_3 = \{(1, y), (2, y), (3, y)\}$$

จะได้ว่า r_1 ไม่เป็นฟังก์ชัน ส่วน r_2 และ r_3 เป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่าง 4.10 กำหนด $f = \{(x, y) : x, y \in R \text{ และ } y = x^2 + 1\}$

จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันเพราะ f เป็นความสัมพันธ์สำหรับแต่ละ $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in f$ จะได้

ถ้า $x_1 = x_2$ แล้ว $y_1 = y_2$

เราสามารถพิสูจน์ได้ดังนี้

$$\text{ให้ } x_1 = x_2$$

$$\text{จะได้ } x_1^2 = x_2^2$$

$$\text{ดังนั้น } x_1^2 + 1 = x_2^2 + 1$$

$$\text{จาก } (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in f \text{ จะได้ว่า}$$

$$y_1 = y_2$$

นั่นคือคู่อันดับ (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) ใดๆ ที่เป็นสมาชิกของ f ถ้า $x_1 = x_2$ แล้ว $y_1 = y_2$

ตัวอย่าง 4.11 $g = \{(x, y) : x, y \in R \text{ และ } y^2 = x + 3\}$

ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะ $(1, 2) \in g$ และ $(1, -2) \in g$ เนื่องจาก $1 = 1$ แต่ $2 \neq -2$

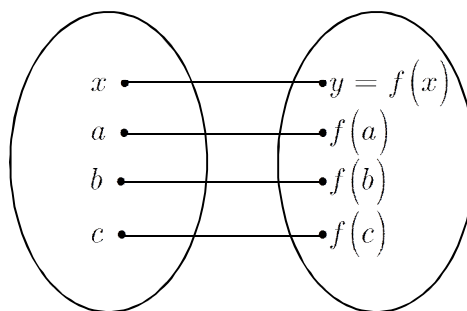
เนื่องจากฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์ ดังนั้น โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันคือโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์นั่นเองและวิธีการหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันเช่นเดียวกับการหาโดเมน และเรนจ์ของความสัมพันธ์ถ้า f เป็นฟังก์ชันจะเขียน D_f และ R_f แทนโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน f ตามลำดับ

4.4 ชนิดของฟังก์ชัน

บทนิยาม 4.9

ถ้า f เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B ที่เป็นฟังก์ชันและ $D_f = A$ เรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B เขียนแทนด้วย $f : A \rightarrow B$

ถ้า $(x, y) \in f$ เรียก y ว่าภาพของ x ภายใต้ f หรือ y เป็นค่าของฟังก์ชัน f ที่ x เขียนแทนด้วย $y = f(x)$ ดังภาพ



ภาพประกอบ 4.1 แสดงภาพฟังก์ชัน $y = f(x)$

ที่มา : ดวงใจ ลิ้มอำไพ. 2544 : 121

จากบทนิยามเซต A และเซต B อาจเป็นเซตเดียวกัน นั่นคือ $A = B$ และในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะกรณีที่เซต A และเซต B เป็นเซตย่อยของ R (เซตของจำนวนจริง)

บทนิยาม 4.10

ถ้า f เป็นฟังก์ชันจากเซตย่อยของ R ไปยัง R จะเรียกว่า f เป็นฟังก์ชันค่าจริง และถ้า $f = \{(x, y) : x, y \in R \text{ และ } y = f(x)\}$ นิยมเขียนโดยย่อว่า $y = f(x)$

ตัวอย่าง 4.12 กำหนดให้ $f(x) = 3x - 4$ และ $g(x) = 5x + 3$ ดังนั้น

1. $f(1) = 3(1) - 4 = -1$
2. $f(-3) = 3(-3) + 4 = -5$
3. $f(t) = 3(t) + 4 = 3t + 4$
4. $g(-2) = 5(-2) + 3 = -7$
5. $g(3) = 5(3) + 3 = 18$
6. $g(f(2)) = 5(f(2)) + 3 = 5(3(2) - 4) + 3 = 5(2) + 3 = 13$

บทนิยาม 4.11

ให้ $f : A \rightarrow B$ และถ้า $R_f = B$ จะเรียก f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B เขียนแทนด้วย $f : A \xrightarrow{\text{onto}} B$

บทนิยาม 4.12

ให้ $f : A \rightarrow B$ จะเรียก f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งก็ต่อเมื่อถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$ เขียนแทนด้วย $f : A \xrightarrow{1-1} B$

บทนิยาม 4.13

f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B จะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง และเรียกเซต A กับเซต B ว่ามีการสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง เขียนแทนด้วย $f : A \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} B$

4.5 ฟังก์ชันผกผัน

ในหัวข้อที่ผ่านมาเมื่อให้ความสัมพันธ์ใด ๆ มา เราจะสามารถหาความสัมพันธ์ผกผันของความสัมพันธ์นั้นได้เสมอ และเนื่องจากว่าถ้า f เป็นฟังก์ชันแล้ว f จะต้องเป็นความสัมพันธ์ด้วย ดังนั้น จึงสามารถหาความสัมพันธ์ผกผันของ f ได้เสมอเช่นกัน ซึ่งความสัมพันธ์ผกผันของฟังก์ชัน f อาจจะเป็นหรือไม่เป็นฟังก์ชันก็ได้ (รณชัย มาเจริญทรัพย์, 2547 : 45-46)

ตัวอย่าง 4.13 กำหนด $f = \{(1,2), (2,4), (3,6), (4,8)\}$
 ดังนั้น $f^{-1} = \{(2,1), (4,2), (6,3), (8,4)\}$

ตัวอย่าง 4.14 กำหนด $f = \{(x,y) : x,y \in R \text{ และ } y = x - 2\}$ จงหา f^{-1}

วิธีทำ จากบทนิยามจะได้ $f^{-1} = \{(y,x) : x,y \in R \text{ และ } y = x - 2\}$
 $= \{(y,x) : x,y \in R \text{ และ } x = y + 2\}$
 $= \{(y,x) : x,y \in R \text{ และ } y = x + 2\}$

ข้อสังเกต 4.3

จะพบว่าถ้า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง f^{-1} จะเป็นฟังก์ชันและถ้า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงแล้ว f^{-1} จะเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงด้วย กล่าวคือ ถ้า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B แล้ว f^{-1} เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก B ไปทั่วถึง A นั่นคือ $f : A \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} B$ แล้วจะได้ $f^{-1} : A \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} B$

บทนิยาม 4.14

ให้ f เป็นฟังก์ชัน ฟังก์ชันผกผันของ f คือความสัมพันธ์ผกผันของ f ที่เป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่าง 4.15 กำหนด $f = \{(x,y) : x,y \in R \text{ และ } y = 2x - 6\}$

วิธีทำ จากที่กำหนดให้ $y = f(x) = 2x - 6$

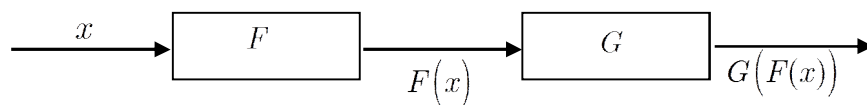
จะเห็นว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง

ดังนั้น จึงสามารถหาฟังก์ชันผกผันของ f ได้

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น } f^{-1} &= \{(y, x) : x, y \in R \text{ และ } y = 2x - 6\} \\
 &= \{(x, y) : x, y \in R \text{ และ } x = 2y - 6\} \\
 &= \{(x, y) : x, y \in R \text{ และ } y = \frac{x-6}{2}\}
 \end{aligned}$$

4.6 ฟังก์ชันประกอบ

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = (x^2 + 3x - 1)^{100}$ จะเห็นว่าในการดำเนินการหาคำนวณเกี่ยวกับฟังก์ชันนี้โดยตรงอาจจะไม่สะดวกแต่ถ้าเราให้ $F(x) = x^2 + 3x - 1$ และ $G(x) = x^{100}$ ดังนั้นจะได้ $f(x) = (x^2 + 3x - 1)^{100} = G(F(x))$ ซึ่งเราเรียกว่า $G(F(x))$ “เป็นฟังก์ชันประกอบระหว่างฟังก์ชัน G กับฟังก์ชัน F ” ซึ่งทำให้การคำนวณหรือการดำเนินการในบางครั้งกระทำได้สะดวกและรวดเร็วยิ่งขึ้น กระบวนการอาจเขียนเป็นแผนผังได้ดังภาพ (ปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร, 2547 : 116-118)

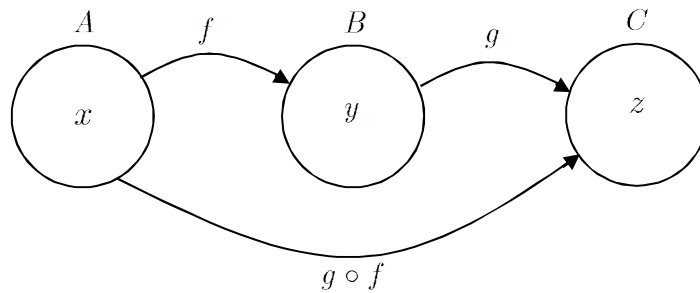


ภาพประกอบ 4.2 แสดงแผนผังการประกอบของฟังก์ชัน

ที่มา : ดวงใจ ลิ้มอำไพ. 2544 : 125

บทนิยาม 4.15

ให้ $f : A \rightarrow B$ และ $g : B \rightarrow C$ แล้ว ฟังก์ชันประกอบของ f และ g เขียนแทนด้วย $g \circ f$ (อ่านว่า g โอ f) คือฟังก์ชันจาก A ไป C นั่นคือ $g \circ f : A \rightarrow C$ โดยที่ $g \circ f(x) = g(f(x))$ สำหรับทุก $x \in A$



ภาพประกอบ 4.3 แสดงฟังก์ชันประกอบ $g \circ f$

ที่มา : ปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร. 2547 : 162

จากภาพประกอบ 4.3 ถ้าให้ $x \in A, y \in B$ และ $z \in C$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B โดยที่ $(x, y) \in f$ หรือ $y = f(x)$ และ g เป็นฟังก์ชันจาก B ไปยัง C โดยที่ $(y, z) \in g$ หรือ $z = g(y) = g(f(x))$ ดังนั้น $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง C โดยที่ $(x, z) \in g \circ f$ หรือ $z = g \circ f(x)$ ซึ่งจะเห็นว่า $g \circ f(x) = g(f(x)) = z$ กล่าวคือค่าของ $g \circ f$ ที่ x เท่ากับค่าของฟังก์ชัน g ที่ $f(x)$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ z นั้นเอง

ตัวอย่าง 4.16 กำหนด $f : R \rightarrow R$ และ $g : R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามดังนี้ $f(x) = x^2 + 3$ และ $g(x) = 2x - 1$ สำหรับ $x \in R$ จะสามารถหา $g \circ f$ และ $f \circ g$ ได้หรือไม่

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ } g \circ f(x) &= g(f(x)) \\
 &= g(x^2 + 3) \\
 &= 2(x^2 + 3) - 1 \\
 &= 2x^2 + 5
 \end{aligned}$$

นั่นคือ $g \circ f = \{(x, y) : x, y \in R \text{ และ } y = 2x^2 + 5\}$

$$\begin{aligned}
 f \circ g(x) &= f(g(x)) \\
 &= f(2x - 1) \\
 &= (2x - 1)^2 + 3 \\
 &= (4x^2 - 4x + 1) + 3 \\
 &= 4x^2 - 4x + 4
 \end{aligned}$$

นั่นคือ $f \circ g = \{(x, y) : x, y \in R \text{ และ } y = 4x^2 - 4x + 4\}$

4.7 พีชคณิตของฟังก์ชัน

พีชคณิตของฟังก์ชัน จะเป็นการกล่าวถึงการสร้างฟังก์ชันขึ้นใหม่จากฟังก์ชันค่าจริงที่ให้มา ตั้งแต่สองฟังก์ชันขึ้นไป โดยการนำฟังก์ชันเหล่านั้นมาดำเนินการ บวก ลบ คูณ หรือหารกัน ดังบทนิยามต่อไปนี (จินดา อยู่เป็นสุข, 2551 : 343).

บทนิยาม 4.16

f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่งมีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง ผลบวก ผลต่าง ผลคูณ และ ผลหารของฟังก์ชัน นิยามโดย

$$1. (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{เมื่อ } x \in D_f \cap D_g$$

$$2. (f - g)(x) = f(x) - g(x) \quad \text{เมื่อ } x \in D_f \cap D_g$$

$$3. (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \text{เมื่อ } x \in D_f \cap D_g$$

$$4. \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{เมื่อ } x \in D_f \cap D_g \text{ และ } g(x) \neq 0$$

ข้อสังเกต 4.4

$$1. D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$$

$$2. D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

ตัวอย่าง 4.17 ให้ $f = \{(a, 0), (b, 2), (c, 4), (d, 6), (e, 8)\}$

$$g = \{(a, 1), (b, 4), (c, 9), (f, 16)\}$$

จงหา 1. $f + g$ 2. $(f + g)(b)$ 3. $f - g$ 4. $(g - f)(a)$

5. $f \cdot g$ 6. $(f \cdot g)(c)$ 7. $\frac{g}{f}$ 8. $\frac{f}{g}(c)$

วิธีทำ จาก $f = \{(a, 0), (b, 2), (c, 4), (d, 6), (e, 8)\}$ และ

$$g = \{(a, 1), (b, 4), (c, 9), (f, 16)\}$$

จะได้ $D_f = \{a, b, c, d, e\}$

และ $D_g = \{a, b, c, f\}$

$$\text{ดังนั้น } D_f \cap D_g = \{a, b, c\}$$

$$\text{เนื่องจาก } D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = \{a, b, c\}$$

1. $f + g = \{(a, 0 + 1), (b, 2 + 4), (c, 4 + 9)\} = \{(a, 1), (b, 6), (c, 13)\}$
2. $(f + g)(b) = f(b) + g(b) = 2 + 4 = 6$
3. $f - g = \{(a, 0 - 1), (b, 2 - 4), (c, 4 - 9)\} = \{(a, -1), (b, -2), (c, -5)\}$
4. $(g - f)(a) = g(a) - f(a) = 1 - 0 = 1$
5. $f \cdot g = \{(a, 0 \times 1), (b, 2 \times 4), (c, 4 \times 9)\} = \{(a, 0), (b, 8), (c, 36)\}$
6. $(f \cdot g)(c) = f(c) \cdot g(c) = 9 \times 4 = 36$

$$\text{เนื่องจาก } D_f \cap D_g = \{a, b, c\} \text{ และ } f(a) = 0$$

$$\text{ดังนั้น } D_{\frac{g}{f}} = \{a, b, c\} - \{a\} = \{b, c\}$$

$$7. \frac{g}{f} = \left\{ \left(b, \frac{4}{2} \right), \left(c, \frac{9}{4} \right) \right\}$$

$$8. \frac{f}{g}(c) = \frac{f(c)}{g(c)} = \frac{4}{9}$$

สรุปท้ายบทที่ 4

สำหรับเนื้อหาที่กล่าวมาทั้งหมดในบทนี้แบ่งเป็นสองส่วนใหญ่ๆ คือความสัมพันธ์ซึ่งศึกษาทั้งคุณสมบัติทฤษฎีที่มีความกว้างของเนื้อหา และอีกส่วนคือ ฟังก์ชันที่สร้างมาจากความสัมพันธ์ศึกษาทั้งโดเมน เรนจ์การดำเนินการของฟังก์ชัน รวมถึงฟังก์ชันที่ถูกนิยมนำมาใช้บ่อยๆ เช่น ฟังก์ชันเชิงเส้น ฟังก์ชันกำลังสอง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ เป็นต้น ซึ่งถูกนำไปใช้ประโยชน์อย่างกว้างขวางและหลากหลายสาขา ประยุกต์ใช้ในการทำงานทั้งทางด้านพาณิชยศาสตร์ด้านวิศวกรรม ด้านคอมพิวเตอร์ฯลฯ นอกจากนี้ยังเป็นพื้นฐานในการเรียนคณิตศาสตร์ในเรื่องอื่น ๆ เช่น ฟังก์ชันตรีโกณมิติฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียล ฟังก์ชันลอการิธึม แคลคูลัส เป็นต้น รวมถึงขยายพื้นฐานการเรียนรู้คณิตศาสตร์ขั้นสูงทั้งพีชคณิตนามธรรม พีชคณิตเชิงเส้น แคลคูลัสขั้นสูง การวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ทฤษฎีกราฟ ทฤษฎีรหัส เป็นต้น จึงถือว่าเป็นอีกหนึ่งเรื่องพื้นฐานที่อีกหลายสาขาวิชาต้องเรียนรู้และทำความเข้าใจ

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4

1. กำหนดให้ $A = \{1, 2\}$ และ $B = \{1, 2, 3\}$ จงหา $A \times B$ และ $B \times A$
2. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{1, 2, 3, 4\}$ จงหาความสัมพันธ์ มากกว่า จาก A ไปยัง B
3. กำหนดให้ N เป็นเซตของจำนวนนับและ $r = \{(x, y) : x, y \in N, x + 3y = 18\}$
จงหา D_r และ R_r
4. จงบอกความสัมพันธ์ต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันหรือไม่ พร้อมทั้งบอกโดเมน และ เรนจ์
 - 4.1 $f = \{(12, 1), (9, 2), (6, 3), (3, 4)\}$
 - 4.2 $g = \{(1, 1), (1, 2), (6, 3), (3, 4)\}$
 - 4.3 $h = \{(x, y) : x, y \in R, y = 3x - 1\}$
 - 4.4 $i = \{(x, y) : x, y \in R, x^2 + y^2 = 1\}$
5. กำหนด $r = \{(x, y) : x, y \in R, y = 9x + 2\}$ จงหา r^{-1}
6. กำหนด $s = \{(x, y) : x, y \in R, x^2 + y = 2\}$ จงหา s^{-1}
7. กำหนด $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 2x - 3$, และ $h(x) = x - 5$ จงหา

7.1 $f \circ g(x)$	7.2 $h \circ g(x)$
7.3 $g \circ h(x)$	7.4 $h \circ f(x)$
7.5 $f \circ g^{-1}(x)$	7.6 $g \circ h^{-1}(x)$
8. ให้ $f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 6), (e, 8)\}$
 $g = \{(a, 0), (b, 1), (c, -2), (f, 5)\}$
 จงหา

8.1 $f + g$	8.2 $(f + g)(b)$
8.3 $f - g$	8.4 $(g - f)(a)$
8.5 $f \cdot g$	8.6 $(f \cdot g)(c)$
8.7 $\frac{g}{f}$	8.8 $\frac{f}{g}(c)$

เอกสารอ้างอิง

- จินดา อยู่เป็นสุข. (2551). **คณิตศาสตร์เพิ่มเติมเล่ม 2 ม.4-6**. กรุงเทพมหานคร : ภูมิบัณฑิตการพิมพ์.
- ปราณี เจริญกิจวัฒน์ และลัดดาวัลย์ เพ็ญสุภา. (2530). **คณิตศาสตร์ทั่วไป**. กรุงเทพมหานคร : สำนักปรกาศพริก.
- ปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร. (2547). **หลักการคณิตศาสตร์**. กรุงเทพมหานคร : ด้านสุทธาการพิมพ์.
- รณชัย มาเจริญทรัพย์. (2551). **คณิตศาสตร์เพิ่มเติม เล่ม 1**. กรุงเทพมหานคร : ภูมิบัณฑิตการพิมพ์.
- ศุภกิจ เฉลิมวิสุตมกุล. (2553). **คณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4**. กรุงเทพมหานคร : แม็ค.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2546). **หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ มัธยมศึกษาปีที่ 4**. กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์คุรุสภา.

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 5

เนื้อหาประจำบท

1. ฟังก์ชันชี้กำลัง
2. กราฟของฟังก์ชันชี้กำลัง
3. สมการฟังก์ชันชี้กำลัง
4. ฟังก์ชันลอการิทึม
5. กราฟของฟังก์ชันลอการิทึม
6. ลอการิทึมสามัญ และลอการิทึมธรรมชาติ
7. สมการลอการิทึม

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. ให้ความหมายและอธิบายฟังก์ชันชี้กำลังได้
2. เขียนกราฟของฟังก์ชันชี้กำลังได้
3. แก้สมการฟังก์ชันชี้กำลังในรูปแบบต่าง ๆ ได้
4. อธิบายและให้ความหมายฟังก์ชันลอการิทึมได้
5. เขียนกราฟของฟังก์ชันลอการิทึม
6. อธิบายและเขียนลอการิทึมสามัญ และลอการิทึมธรรมชาติ ได้
7. เข้าใจทฤษฎีบทต่าง ๆ ของลอการิทึม
8. นำทฤษฎีบทต่าง ๆ ไปแก้สมการลอการิทึมได้

วิธีการสอนและกิจกรรมการเรียนรู้การสอนประจำบท

1. ผู้สอนบรรยายหัวข้อต่อไปนี้พร้อมเปิดโอกาสให้ซักถาม
 - 1.1 ฟังก์ชันชี้กำลัง
 - 1.2 กราฟของฟังก์ชันชี้กำลัง
 - 1.3 สมการฟังก์ชันชี้กำลัง
 - 1.4 ฟังก์ชันลอการิทึม
 - 1.5 กราฟของฟังก์ชันลอการิทึม
 - 1.6 ลอการิทึมสามัญ และลอการิทึมธรรมชาติ
 - 1.7 สมการลอการิทึม

2. ให้นักศึกษาทำกิจกรรมต่อไปนี้

- 2.1 ศึกษาข้อมูล เกี่ยวกับเรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชันเพิ่มเติม
- 2.2 ทำแบบฝึกหัดที่กำหนดให้

สื่อการเรียนการสอน

- 1. เอกสารประกอบการสอนและตำราต่าง ๆ
- 2. Slide Presentation

การวัดผลและการประเมินผล

- 1. สังเกตความสนใจของนักศึกษาขณะสอน ความตั้งใจ การฟัง การจดบันทึก และการซักถาม
- 2. แบบฝึกหัด
- 3. แบบทดสอบ
- 4. การมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอน

บทที่ 5

ฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

การยกกำลัง คือ การดำเนินการทางคณิตศาสตร์อย่างหนึ่งเขียนอยู่ในรูป ซึ่งประกอบด้วยสองจำนวนคือฐาน และเลขชี้กำลัง โดย พื้นฐานแล้วการยกกำลังจะมีความหมายเหมือนกับการคูณ ซ้ำๆ กันซึ่งเราได้ศึกษาในบทที่ผ่านมาแล้วซึ่งเราได้ศึกษาตั้งแต่เลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มและเลขชี้กำลังไม่เป็นจำนวนเต็ม และฟังก์ชันที่ได้ศึกษามานั้นเป็นฟังก์ชันพีชคณิตแต่ในหัวข้อที่เราจะศึกษาต่อไปนี้ซึ่งไม่เป็นฟังก์ชันพีชคณิต และฟังก์ชันที่เราจะศึกษาต่อไปนี้ต้องอาศัยความรู้เรื่องเลขยกกำลังเป็นองค์ประกอบ ในการศึกษา เราเรียกฟังก์ชันดังกล่าวว่า ฟังก์ชันชี้กำลังหรือฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล นั่นคือ ฟังก์ชันที่เลขชี้กำลังถูกใช้เพื่อจำลองความสัมพันธ์ เมื่อการเปลี่ยนแปลงคงตัวในตัวแปรอิสระ ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงตามสัดส่วนเดียวกันในตัวแปรตามฟังก์ชันนี้มักเขียนเป็น $\exp(x)$ โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อตัวแปรอิสระเขียนเป็นเลขชี้กำลัง ไม่ได้เช่นเดียวกัน เช่นกำหนดให้ a เป็นจำนวนจริงที่ $a > 0$ และ $a \neq 1$ ฟังก์ชัน $y = a^x$ เรียกว่าฟังก์ชันเลขชี้กำลังซึ่ง ส่วนอินเวอร์สฟังก์ชันเลขชี้กำลังซึ่งเขียนได้ในรูป $x = a^y$ เรียกว่าฟังก์ชันลอการิทึม ดังนั้นจะมีสมการเป็น $x = a^y$ แต่เนื่องจาก $x = a^y$ เราไม่สามารถใช้ความรู้ทางพีชคณิต มาทำให้สมการดังกล่าวอยู่ในรูปฟังก์ชันชัดเจนได้ ดังนั้นจึงกำหนดสัญลักษณ์ใหม่ขึ้นมาแทน $x = a^y$ ซึ่งใช้สัญลักษณ์ $y = \log_a x$ และสำหรับในบทนี้แบ่งเนื้อหาออกเป็น 7 เรื่อง ได้แก่ ฟังก์ชันชี้กำลัง กราฟของฟังก์ชันชี้กำลัง สมการฟังก์ชันชี้กำลัง ฟังก์ชันลอการิทึม กราฟของฟังก์ชันลอการิทึม ลอการิทึมสามัญ และลอการิทึมธรรมชาติ และสมการลอการิทึม

5.1 ฟังก์ชันชี้กำลัง

จากฟังก์ชันที่เคยศึกษามา แล้วในบทที่ผ่านมาเช่น ฟังก์ชัน $y = x^2$ ฟังก์ชัน $y = \frac{x^3 + 5x}{3x - 2}$ ซึ่งเราเรียกฟังก์ชันต่าง ๆ เหล่านี้ว่า ฟังก์ชันพีชคณิตแต่ในหัวข้อที่เราจะศึกษาต่อไปนี้ซึ่งไม่เป็นฟังก์ชันพีชคณิต และฟังก์ชันที่เราจะศึกษาต่อไปนี้ต้องอาศัยความรู้เรื่องเลขยกกำลังเป็นองค์ประกอบในการศึกษา เราเรียกฟังก์ชันดังกล่าวว่า **ฟังก์ชันชี้กำลัง** ซึ่งกล่าวได้ดังบทนิยามต่อไปนี้ (สมัย เหล่าวานิชย์ และพัชรพรณ เหล่าวานิชย์, 2521 : 54)

บทนิยาม 5.1

ให้ f เป็นฟังก์ชันจากเซตของจำนวนจริงไปยังเซตของจำนวนจริง
ฟังก์ชันนี้กำลังคือ ฟังก์ชัน

$$f = \left\{ (x, y) \mid y = a^x \text{ เมื่อ } a > 0 \text{ และ } a \neq 1 \right\}$$

ตัวอย่าง 5.1 ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันนี้กำลัง

$$1. f = \left\{ (x, y) \in R \times R \mid y = 2^x \right\}$$

$$2. g = \left\{ (x, y) \in R \times R \mid y = \left(\frac{1}{5} \right)^x \right\}$$

$$3. f = \left\{ (x, y) \in R \times R \mid y = (\sqrt{7})^x \right\}$$

5.1.1 กราฟของฟังก์ชันนี้กำลัง

จากบทนิยามของฟังก์ชันนี้กำลัง $y = a^x$ โดยที่ $a > 0$ และ $a \neq 1$ นั่นคือฟังก์ชันนี้กำลังนั้นต้องมีฐานเป็นจำนวนจริงบวกที่ไม่เท่ากับ 1 ทั้งนี้เพราะว่าถ้าฐานเท่ากับ 1 แล้วฟังก์ชัน $y = a^x$ คือ $y = 1^x = 1$ ซึ่งฟังก์ชันดังกล่าวมีกราฟเป็นเส้นตรงขนานกับแกน x ซึ่งเราได้ศึกษามาแล้วในหัวข้อที่ผ่านมา พิจารณากราฟมาตรฐานของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลต่อไปนี้

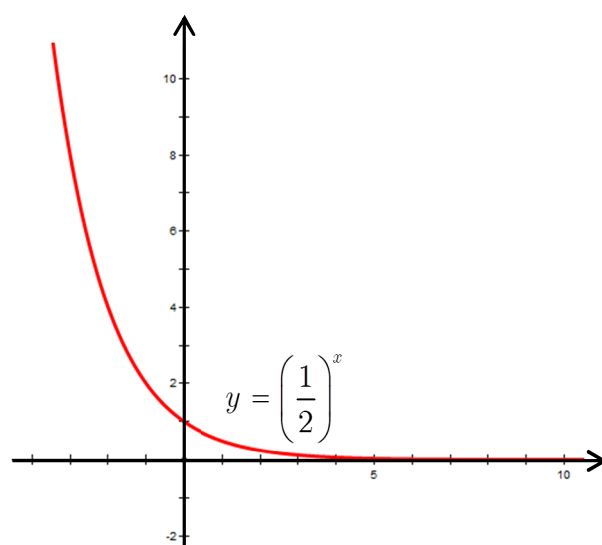
ตัวอย่าง 5.2 จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน $y = \left(\frac{1}{2} \right)^x$

วิธีทำ หาค่า x และ y ที่สอดคล้องกับสมการ จะได้ตามตารางต่อไปนี้

x	-3	-2	-1	1	2	3
y	8	4	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

จากเรื่องกราฟของฟังก์ชัน ค่า x และ y แต่ละคู่ก็คือจุดบนกราฟ $y = \left(\frac{1}{2} \right)^x$ นั่นเอง

ดังนั้นกราฟของ $y = \left(\frac{1}{2} \right)^x$ เป็นลักษณะดังนี้

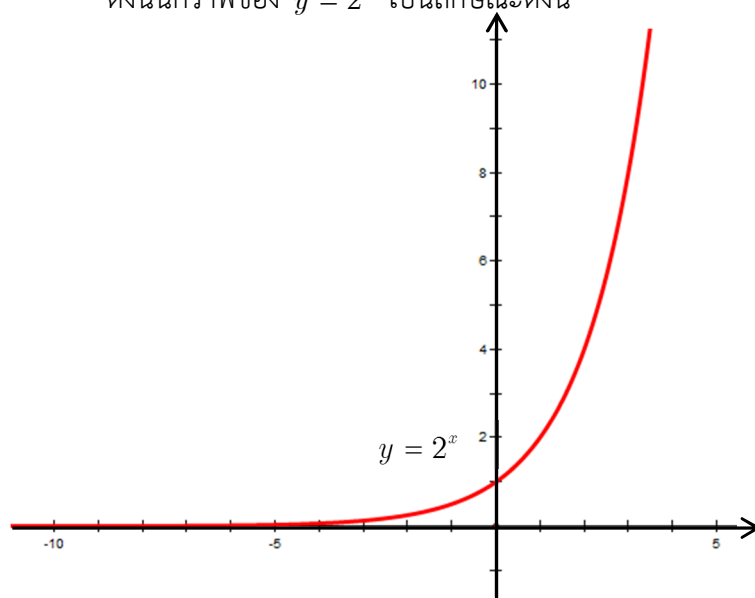


ตัวอย่าง 5.3 จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน $y = 2^x$

วิธีทำ หาค่า x และ y ที่สอดคล้องกับสมการ จะได้ตามตารางต่อไปนี้

x	-3	-2	-1	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	2	4	8

จากเรื่องกราฟของฟังก์ชัน ค่า x และ y แต่ละคู่ก็คือจุดบนกราฟ $y = 2^x$ นั่นเอง
ดังนั้นกราฟของ $y = 2^x$ เป็นลักษณะดังนี้



จากกราฟในตัวอย่าง 5.2 และ 5.3 นั้นเราสามารถจำแนกลักษณะของฟังก์ชันชี้กำลัง $y = a^x$ อย่างคร่าว ๆ ได้ 2 แบบโดยการสังเกตจากค่า a คือ ถ้า $0 < a < 1$ ฟังก์ชัน $y = a^x$ เป็นฟังก์ชันลด และ ถ้า $a > 1$ ฟังก์ชัน $y = a^x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม (สมัย เหล่าวานิชย์ และพัชรพรณ เหล่าวานิชย์, 2521 : 59)

5.1.2 สมการฟังก์ชันชี้กำลัง

ชี้กำลังเรียกว่าสมการชี้กำลังซึ่งเราสามารถใช้ ทฤษฎีบทต่าง ๆ ดังต่อไปนี้ในการหาเซตคำตอบสมการที่มีตัวแปรเป็นเลข(สุเทพ ทองอยู่ และสุเทพ จันทร์สมศักดิ์, 2535 : 407)

ทฤษฎีบท 5.1

ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวกและ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว

1. a^x เป็นจำนวนจริงบวกเพียงจำนวนเดียว
2. สำหรับจำนวนจริง x, y และ $a \neq 1$ ใด ๆ $a^x = a^y$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$
3. สำหรับจำนวนจริง x, y ใด ๆ ซึ่ง $x < y$ จะได้ว่า
 - ถ้า $a > 1$ แล้ว $a^x < a^y$
 - ถ้า $a = 1$ แล้ว $a^x = a^y$
 - ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $a^x > a^y$

ตัวอย่าง 5.4 จงหาตอบของสมการ $5^{3x} = 125$

วิธีทำ เนื่องจาก $5^{3x} = 125$

$$5^{3x} = 5^3$$

จะได้ว่า $3x = 3$

$$x = \frac{3}{3} = 1$$

ดังนั้น $x = 1$

ตัวอย่าง 5.5 จงหาตอบของสมการ $3(2^{3x-2}) = 48$

วิธีทำ เนื่องจาก $3(2^{3x-2}) = 48$

$$2^{3x-2} = \frac{48}{3}$$

$$2^{3x-2} = 16$$

$$2^{3x-2} = 2^4$$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ว่า} \quad 3x - 2 &= 4 \\
 3x &= 4 + 2 \\
 3x &= 6 \\
 x &= \frac{6}{3} \\
 x &= 2
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x = 2$

ตัวอย่าง 5.6 จงหาตอบของสมการ $2^x = 4^{x-1} \cdot 8^{1-2x}$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ} \quad \text{เนื่องจาก} \quad 2^x &= 4^{x-1} \cdot 8^{1-2x} \\
 2^x &= (2^2)^{x-1} \cdot (2^3)^{1-2x} \\
 2^x &= 2^{2(x-1)} \cdot 2^{3(1-2x)} \\
 2^x &= 2^{2x-2} \cdot 2^{3-6x} \\
 2^x &= 2^{(2x-2)+(3-6x)} \\
 2^x &= 2^{(1-4x)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ว่า} \quad x &= 1 - 4x \\
 x + 4x &= 1 \\
 5x &= 1 \\
 x &= \frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x = \frac{1}{5}$

ตัวอย่าง 5.7 จงหาตอบของสมการ $3^{2x} - 3^x = 72$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ} \quad \text{เนื่องจาก} \quad 3^{2x} - 3^x &= 72 \\
 3^{2x} - 3^x - 72 &= 0
 \end{aligned}$$

ให้ $a = 3^x$ จะได้

$$\begin{aligned}
 a^2 - a - 72 &= 0 \\
 (a - 9)(a + 8) &= 0
 \end{aligned}$$

ได้ $a = 9$ หรือ $a = -8$

เนื่องจาก $a = 3^x$ จะได้

$3^x = 9$ หรือ $3^x = -8$ แต่เนื่องจาก $3^x > 0$ ทำให้ $3^x = -8$ เป็นไปไม่ได้

พิจารณา $3^x = 9$

$$3^x = 3^2$$

ดังนั้น $x = 2$

ตัวอย่าง 5.8 จงหาตอบของสมการ $2^{2x+2} + 2 = 9 \cdot 2^x$

วิธีทำ เนื่องจาก $2^{2x+2} + 2 = 9 \cdot 2^x$

$$2^{2x} \cdot 2^2 + 2 = 9 \cdot 2^x$$

$$4 \cdot 2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 2 = 0$$

ให้ $a = 2^x$ จะได้

$$4a^2 - 9a + 2 = 0$$

$$(a - 2)(4a - 1) = 0$$

ได้ $a = 2$ หรือ $a = \frac{1}{4}$

เนื่องจาก $a = 2^x$ จะได้

$$2^x = 2 \quad \text{หรือ} \quad 2^x = \frac{1}{4}$$

$$2^x = 2^1 \quad \text{หรือ} \quad 2^x = 4^{-1} = 2^{-2}$$

$$x = 1 \quad \text{หรือ} \quad x = -2$$

ดังนั้น $x = 1$ หรือ $x = -2$

5.2 ฟังก์ชันลอการิทึม

กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริงที่ $a > 0$ และ $a \neq 1$ ฟังก์ชัน $f = \{(x, y) : y = a^x\}$

เรียกว่าฟังก์ชันเลขชี้กำลังซึ่งเราได้ศึกษามาแล้วในหัวข้อที่ผ่านมา ส่วนอินเวอร์สฟังก์ชันเลขชี้กำลังคือ

$f^{-1} = \{(x, y) : x = a^y\}$ เรียกว่าฟังก์ชันลอการิทึม ดังนั้นจะมีสมการเป็น $x = a^y$ แต่เนื่องจาก

$x = a^y$ เราไม่สามารถใช้ความรู้ทางพีชคณิต มาทำให้สมการการดังกล่าวอยู่ในรูปฟังก์ชันชัดเจนได้

ดังนั้นจึงกำหนดสัญลักษณ์ใหม่ขึ้นมาแทน $x = a^y$ ซึ่งใช้สัญลักษณ์ $y = \log_a x$ (อ่านว่า y เท่ากับ

ลอก x ฐาน a ดังนั้น f^{-1} จึงเขียนได้อีกรูปแบบหนึ่งดังบทนิยามต่อไปนี้(สุเทพ ทองอยู่ และสุเทพ

จันทร์สมศักดิ์, 2535 : 413)

บทนิยาม 5.2.

ให้ f เป็นฟังก์ชันจากเซตของจำนวนจริงไปยังเซตของจำนวนจริง

ฟังก์ชันลอการิทึมคือ ฟังก์ชัน

$$f = \{(x, y) \mid y = \log_a x \text{ เมื่อ } a > 0 \text{ และ } a \neq 1\}$$

5.2.1 กราฟของฟังก์ชันลอการิทึม

จากบทนิยามของฟังก์ชันลอการิทึม $\log_a x$ โดยที่ $a > 0$ และ $a \neq 1$ นั่นคือฟังก์ชันลอการิทึมก็ต้องมีฐานเป็นจำนวนจริงบวกที่ไม่เท่ากับ 1 เหมือนกันกับฟังก์ชันชี้กำลัง ในการหากราฟของฟังก์ชันลอการิทึมนั้นวิธีการง่ายที่สุดคือการใช้ความรู้เกี่ยวกับการหากราฟของฟังก์ชันอินเวอร์สนั้นเอง ต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5.9 จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

วิธีทำ เนื่องจาก $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ เป็นฟังก์ชันอินเวอร์สของ $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ จากตัวอย่าง 5.2

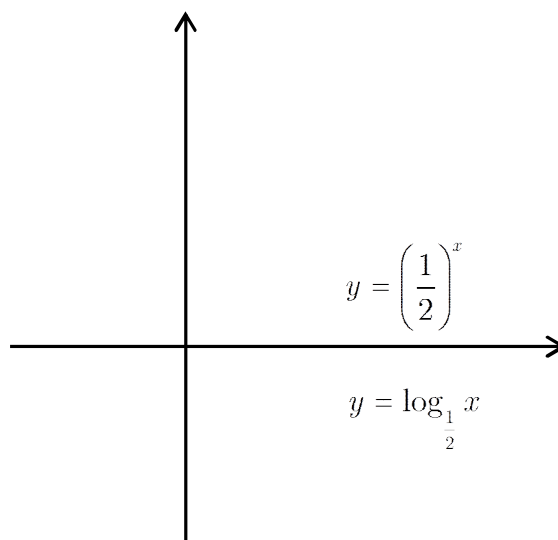
เราหาค่า x และ y ที่สอดคล้องกับสมการ จะได้ตามตารางต่อไปนี้

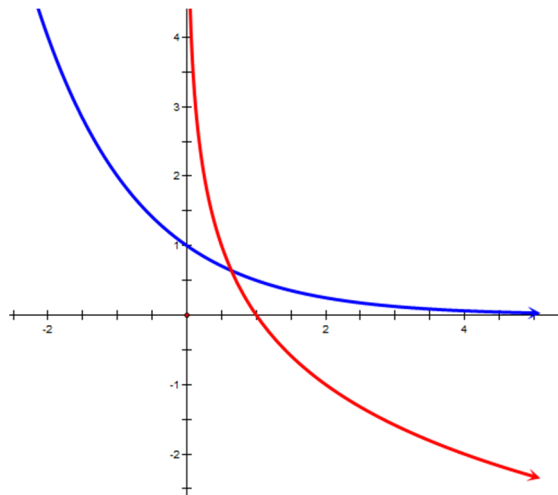
x	-3	-2	-1	1	2	3
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

จึงได้ว่า

x	8	4	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$y = \log_{\frac{1}{2}} x$	-3	-2	-1	1	2	3

ดังนั้นกราฟของ $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ และ $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ เป็นลักษณะดังนี้





ตัวอย่าง 5.10 จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน $y = \log_2 x$

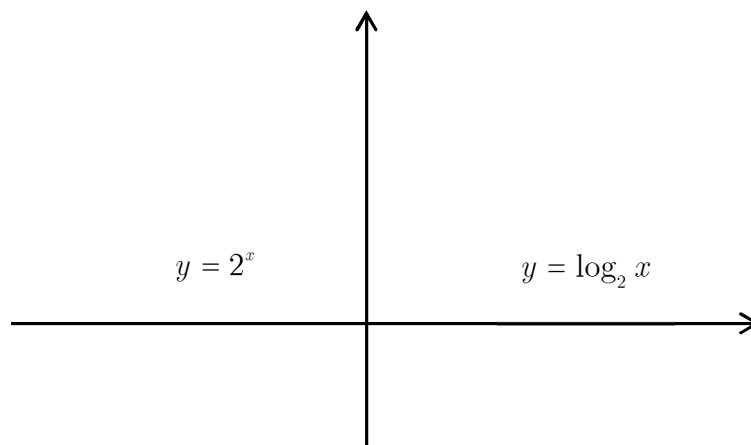
วิธีทำ เนื่องจาก $y = \log_2 x$ เป็นฟังก์ชันอินเวอร์สของ $y = 2^x$ จากตัวอย่าง 5.3 เราหาค่า x และ y ที่สอดคล้องกับสมการ จะได้ตามตารางต่อไปนี้

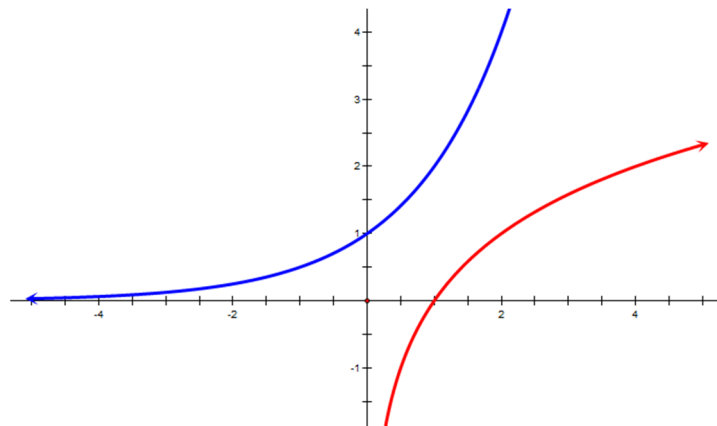
x	-3	-2	-1	1	2	3
$y = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	2	4	8

จึงได้ว่า

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	2	4	8
$y = \log_2 x$	-3	-2	-1	1	2	3

ดังนั้นกราฟของ $y = 2^x$ และ $y = \log_2 x$ เป็นลักษณะดังนี้





จากกราฟในตัวอย่าง 5.10 และ 5.11 นั้นจะเห็นว่ากราฟผ่านจุด $(1, 0)$ เสมอ โดยที่ $D_f = R$ และ $R_f = R^+$ และเราสามารถจำแนกลักษณะของฟังก์ชัน $\log_a x$ อย่างคร่าว ๆ ได้ 2 แบบโดยการสังเกตจากค่า a คือ ถ้า $0 < a < 1$ ฟังก์ชัน $\log_a x$ เป็นฟังก์ชันลดและ ถ้า $a > 1$ ฟังก์ชัน $y = a^x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม (สมัย เหล่าวานิชย์ และพัชรพรณ เหล่าวานิชย์, 2521 : 76)

5.2.2 ลอการิทึมสามัญ และลอการิทึมธรรมชาติ

ในการเขียนลอการิทึมโดยทั่วไป เราต้องเขียนฐานของสมการลอการิทึมกำกับอยู่ด้วย เสมอ เช่น $\log_2 5, \log_8 10, \log_9 9$ เป็นต้น แต่มีลอการิทึมอยู่ 2 ชนิดที่เราไม่นิยมเขียนฐานของ ลอการิทึม เพราะว่าลอการิทึมดังกล่าวนี้เป็นลอการิทึมที่เรานิยมใช้กันมาก จึงไม่เขียนฐานให้เกะกะ แต่เป็นที่รู้จักว่าลอการิทึมดังกล่าวนี้มีฐานเท่าใด ซึ่งลอการิทึมทั้งสองชนิดได้แก่

1. ลอการิทึมสามัญ ลอการิทึมสามัญก็คือลอการิทึมที่มีฐานเท่ากับ 10 ซึ่ง ลอการิทึมสามัญดังกล่าวนี้เราจะไม่เขียนฐาน กล่าวคือ

$$\log_{10} x \text{ จะเขียนแทนด้วย } \log x$$

เช่น

$$\log_{10} 7 \text{ จะเขียนแทนด้วย } \log 7$$

$$\log_{10} 2 \text{ จะเขียนแทนด้วย } \log 2$$

$$\log_{10} 1000 \text{ จะเขียนแทนด้วย } \log 1000$$

สิ่งที่น่าสนใจสำหรับลอการิทึมสามัญก็คือ การหาค่าลอการิทึมของจำนวนจริงบวกซึ่งอยู่ในรูป 10^n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม ซึ่งสามารถสังเกตได้อย่างง่าย ๆ ดังนี้

$$\begin{aligned}
\log 1 &= \log 10^0 = 0 \log 10 = 0 \\
\log 10 &= \log 10^1 = 1 \log 10 = 1 \\
\log 100 &= \log 10^2 = 2 \log 10 = 2 \\
\log 1000 &= \log 10^3 = 3 \log 10 = 3 \\
\log 10000 &= \log 10^4 = 4 \log 10 = 4 \\
\log 0.1 &= \log 10^{-1} = -1 \log 10 = -1 \\
\log 0.01 &= \log 10^{-2} = -2 \log 10 = -2 \\
\log 0.001 &= \log 10^{-3} = -3 \log 10 = -3
\end{aligned}$$

จากตัวอย่างจะพบว่าลอการิทึมสามัญของจำนวนจริงบวกที่อยู่ในรูป 10^n จะมีค่าเท่ากับ n เสมอ กล่าวคือ

$$\log 10^n = n \log 10 = n \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

2. ลอการิทึมธรรมชาติ ลอการิทึมธรรมชาติเป็นลอการิทึมที่มีประโยชน์อย่างมากในการศึกษาคณิตศาสตร์ชั้นสูง ลักษณะของลอการิทึมธรรมชาติก็คือ ฐานของลอการิทึมจะมีค่าเท่ากับ e โดยที่ e เป็นสัญลักษณ์แทนจำนวนอตรรกยะ ซึ่งจะกล่าวในบทนิยามต่อไปและเนื่องจากลอการิทึมธรรมชาติเป็นลอการิทึมอีกชนิดหนึ่งที่ใช้กันมากในคณิตศาสตร์ชั้นสูงเราจึงไม่นิยมเขียนฐานของลอการิทึมดังกล่าว กล่าวคือ

$$\log_e x \text{ จะเขียนแทนด้วย } \ln x$$

เช่น

$$\log_e 5 \text{ จะเขียนแทนด้วย } \ln 5$$

$$\log_e 2 \text{ จะเขียนแทนด้วย } \ln 2$$

สำหรับ e เป็นค่าคงตัวที่เป็นจำนวนอตรรกยะมีค่าประมาณ 2.71828 โดยที่ e มีนิยามดังต่อไปนี้ (สุกัญญา สนิทวงศ์ ณ อยุธยา และคณะ, 2556 : 61)

บทนิยาม 2.7.

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ หรือ } e = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}, x = \frac{1}{n}$$

ข้อสังเกต 5.1

$$\ln e = \log_e e = 1$$

5.2.3 สมการลอการิทึม

สมการลอการิทึม ก็คือสมการที่มีลอการิทึมของตัวแปรรวมอยู่ด้วย ดังนั้นการแก้สมการลอการิทึมก็คือการหาเซตคำตอบของตัวแปรที่สอดคล้องกับสมการนั่นเอง สำหรับการหาผลเฉลยของสมการนอกจากอาศัยรูปแบบของลอการิทึม $\log_a x = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว เราสรุปได้ว่า $x = a^c$ นั่นเอง และนอกจากรูปแบบพื้นฐานที่จะช่วยในการหาผลเฉลยของสมการลอการิทึมแล้วเรายังต้องทฤษฎีบทต่าง ๆ ดังที่จะกล่าวต่อไปนี้(คณาจารย์ Think Beyond Genius, 2558 : 159)

ทฤษฎีบท 5.2

ให้ M, N, a และ b เป็นจำนวนจริงบวก โดยที่ $a \neq 1, b \neq 1$ และ n เป็นจำนวนจริงใด ๆ

1. $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
2. $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
3. $\log_a M^n = n \log_a M$
4. $\log_a a = 1$
5. $\log_a 1 = 0$
6. $a^{\log_a M} = M$
7. $\log_{a^n} M = \frac{1}{n} \log_a M$ เมื่อ $n \neq 0$
8. $\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$
9. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
10. $\log_{ab} a + \log_{ab} b = 1$

ดังนั้นเมื่อเราทราบทฤษฎีบทที่จะนำไปช่วยในการหาผลเฉลยของสมการลอการิทึมดังกล่าว
ต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5.11 จงหาคำตอบของสมการ $\log_2(x-1) = 3$

วิธีทำ จากสมการ $\log_2(x-1) = 3$

จะได้ $x-1 = 2^3$

$$x-1 = 8$$

$$x = 9$$

ตรวจสอบ

$$\text{แทน } x = 9 \text{ ใน } \log_2(x-1) = 3$$

$$\text{จะได้ } \log_2 8 = 3 \text{ เป็นไปได้}$$

ดังนั้น คำตอบของสมการ คือ $x = 9$

ตัวอย่าง 5.12 จงหาคำตอบของสมการ $\log(x-1)^2 = 1$

วิธีทำ จากสมการ $\log(x-1)^2 = 1$

จะได้ $(x-1)^2 = 10^1$

$$x^2 - 2x + 1 = 10$$

$$x^2 - 2x - 9 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(-9)}}{2} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{40}}{2} \\ &= \frac{2 \pm 2\sqrt{10}}{2} \\ &= \frac{2 \pm 2\sqrt{10}}{2} \\ &= 1 \pm 1\sqrt{10} \\ &= 1 \pm \sqrt{10} \end{aligned}$$

ตรวจสอบ

$$\text{จาก } \log(x-1)^2 = 1 \text{ และ } (x-1)^2 \geq 0 \text{ เสมอ}$$

ดังนั้น คำตอบของสมการ คือ $x = 1 \pm \sqrt{10}$

ตัวอย่าง 5.13 จงหาคำตอบของสมการ $\log 50x = \log 2 + 2$

วิธีทำ จากสมการ $\log 50x = \log 2 + 2$
 จะได้ $\log 50x = \log 2 + 2 \log 10$
 $\log 50x = \log 2 + \log 10^2$
 $\log 50x = \log(2 \times 10^2)$
 $50x = (2 \times 10^2)$
 $50x = 2 \times 100$
 $50x = 200$
 $x = 4$

ตรวจสอบ

แทน $x = 4$ ใน $\log 50x = \log 2 + 2$
 จะได้ $\log 200 = \log 2 + 2$ เป็นไปได้

ดังนั้น คำตอบของสมการ คือ $x = 4$

ตัวอย่าง 5.14 จงหาคำตอบของสมการ $\log_2(x-2) + \log_2(x-3) = 1$

วิธีทำ จากสมการ $\log_2(x-2) + \log_2(x-3) = 1$
 จะได้ $\log_2(x-2)(x-3) = 1$
 $\log_2(x-2)(x-3) = 1$
 $(x-2)(x-3) = 2^1$
 $(x-2)(x-3) = 2$
 $x - 5x + 6 = 2$
 $x - 5x + 4 = 0$
 $(x-4)(x-1) = 0$
 $x = 1$ หรือ $x = 4$

ตรวจสอบ

แทน $x = 1$ ใน $\log_2(x-2) + \log_2(x-3) = 1$
 จะได้ $\log_2(-1) + \log_2(-2) = 1$ เป็นไปไม่ได้ เพราะ $\log_a x, x > 0$
 แทน $x = 4$ ใน $\log_2(x-2) + \log_2(x-3) = 1$
 จะได้ $\log_2 2 + \log_2 1 = 1$ เป็นไปได้

ดังนั้น คำตอบของสมการ คือ $x = 4$

ตัวอย่าง 5.15 จงหาคำตอบของสมการ $\log(x+4) + \log(2x+3) = \log(1-2x)$

วิธีทำ จาสมการ $\log(x+4) + \log(2x+3) = \log(1-2x)$

$$\text{จะได้ } \log(x+4) + \log(2x+3) - \log(1-2x) = 0$$

$$\log \frac{(x+4)(2x+3)}{(1-2x)} = 0$$

$$\frac{(x+4)(2x+3)}{(1-2x)} = 10^0$$

$$\frac{(x+4)(2x+3)}{(1-2x)} = 1$$

$$(x+4)(2x+3) = 1-2x$$

$$2x^2 + 11x + 12 = 1 - 2x$$

$$2x^2 + 13x + 11 = 0$$

$$(2x+11)(x+1) = 0$$

$$x = -\frac{11}{2} \text{ หรือ } x = -1$$

ตรวจสอบ

$$\text{แทนค่า } x = -\frac{11}{2} = -5.5 \text{ ใน } \log(x+4) + \log(2x+3) = \log(1-2x)$$

$$\text{จะได้ } \log(-1.5) + \log(-8) = \log 12 \quad \text{เป็นไปไม่ได้ เพราะ } \log_a x, x > 0$$

$$\text{แทนค่า } x = -1 \text{ ใน } \log(x+4) + \log(2x+3) = \log(1-2x)$$

$$\text{จะได้ } \log 3 + \log 1 = \log 3 \quad \text{เป็นไปไม่ได้}$$

ดังนั้น คำตอบของสมการ คือ $x = -1$

ตัวอย่าง 5.16 จงหาคำตอบของสมการ $\log_2(x^2-1) = \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$

วิธีทำ ทำฐานของลอการิทึมในสมการให้เท่ากันก่อน

$$\text{พิจารณา } \log_{\frac{1}{2}}(x-1) = \log_{2^{-1}}(x-1)$$

$$\text{จากทฤษฎีบท 5.2 ข้อ 7 } (\log_{a^n} M = \frac{1}{n} \log_a M)$$

$$\text{จะได้ } \log_{2^{-1}}(x-1) = \frac{1}{-1} \log_2(x-1) = -\log_2(x-1)$$

$$\text{นั่นคือ } \log_2(x^2 - 1) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 1)$$

$$\log_2(x^2 - 1) = -\log_2(x - 1)$$

$$\log_2(x^2 - 1) + \log_2(x - 1) = 0$$

$$\log_2(x^2 - 1)(x - 1) = 0$$

$$(x^2 - 1)(x - 1) = 2^0$$

$$x^3 - x^2 - x + 1 = 1$$

$$x^3 - x^2 - x = 0$$

$$x(x^2 - x - 1) = 0$$

$$x(x^2 - x - 1) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{หรือ} \quad x^2 - x - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(-1)}}{2(1)} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

เนื่องจากในการตรวจสอบโดยการนำค่า x ที่หาได้ แทนในโจทย์นั้นค่อนข้างจะยุ่งยาก ดังนั้น เราจึงใช้วิธีการตรวจสอบโดยพิจารณาค่า x ซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไขที่ว่า $\log_a x$ แล้ว $x > 0$

$$\text{นั่นคือ} \quad x^2 - 1 > 0 \quad \text{และ} \quad x - 1 > 0$$

$$(x - 1)(x + 1) > 0 \quad x > 1$$

$$x > 1 \quad \text{หรือ} \quad x < -1 \quad \text{และ} \quad x > 1$$

จะได้ว่า x ที่เป็นผลเฉลยของสมการนั้นต้องมีค่ามากกว่า 1 เท่านั้น

$$\text{ดังนั้น} \quad \text{ผลเฉลยของสมการคือ } x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

ตัวอย่าง 5.17 จงหาคำตอบของสมการ $\log_{x+4}(x^2 - 1) = \log_{x+4}(5 - x)$

วิธีทำ จากสมการที่โจทย์กำหนดให้จะพบว่าฐานของลอการิทึมอยู่ในลักษณะเป็นพจน์มีตัวแปร x ดังนั้นตามเงื่อนไขของฐานของลอการิทึมจะได้ว่า

$$x + 4 > 0 \quad \text{และ} \quad x + 4 \neq 1$$

$$\text{นั่นคือ} \quad x > -4 \quad \text{และ} \quad x \neq -3$$

$$\text{จาก } \log_{x+4}(x^2 - 1) = \log_{x+4}(5 - x)$$

$$\text{จะได้ } x^2 - 1 = 5 - x$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x + 3)(x - 2) = 0$$

$$x = -3 \text{ หรือ } x = 2$$

แต่เนื่องจาก $x \neq 3$ ดังนั้น $x = 2$ เท่านั้น

ตรวจสอบ

$$\text{แทนค่า } x = 2 \text{ ใน } \log_{x+4}(x^2 - 1) = \log_{x+4}(5 - x)$$

$$\text{จะได้ } \log 3 = \log 3 \text{ เป็นไปได้}$$

ดังนั้น ผลเฉลยของสมการคือ $x = 2$

ตัวอย่าง 5.18 จงหาคำตอบของสมการ $x^{\log x} = 100x$

$$\text{วิธีทำ จาก } x^{\log x} = 100x$$

$$\text{จะได้ } \log x^{\log x} = \log 100x$$

$$\log \log x = \log 100x$$

$$(\log x)^2 = \log 100 + \log x$$

$$(\log x)^2 - \log x - \log 100 = 0$$

$$(\log x)^2 - \log x - \log 10^2 = 0$$

$$(\log x)^2 - \log x - 2 \log 10 = 0$$

$$(\log x)^2 - \log x - 2 = 0$$

จะพบว่าสมการดังกล่าวอยู่ในรูปกำลังสอง และเพื่อให้มองเห็นอย่างง่าย ๆ ให้ $a = \log x$

$$\text{จะได้ } a^2 - a - 2 = 0$$

$$(a - 2)(a + 1) = 0$$

$$a = 2$$

หรือ

$$a = -1$$

$$\text{จาก } a = \log x$$

$$\text{จะได้ } \log x = 2 \quad \text{หรือ} \quad \log x = -1$$

$$x = 10^2 \quad \text{หรือ} \quad x = 10^{-1}$$

$$x = 100 \quad \text{หรือ} \quad x = \frac{1}{10}$$

ตรวจสอบ

แทนค่า $x = 100$ ใน $x^{\log x} = 100x$

จะได้ $100^{\log 100} = 100(100)$ เป็นไปได้

แทนค่า $x = \frac{1}{10}$ ใน $x^{\log x} = 100x$

จะได้ $\frac{1}{10}^{\log \frac{1}{10}} = 100\left(\frac{1}{10}\right)$ เป็นไปได้

ดังนั้น ผลเฉลยของสมการคือ $x = 10$ หรือ $x = \frac{1}{10}$

สรุปท้ายบทที่ 5

ฟังก์ชันพีชคณิตโดยทั่วไปที่เราได้ศึกษาผ่านมาแล้วนั้นจะเห็นได้ว่าแตกต่างจากฟังก์ชันชี้กำลังในบทนี้มากดังนั้นผู้เขียนจึงได้ให้ศึกษาตั้งแต่การเขียนกราฟของฟังก์ชันชี้กำลังจากบทนิยามของฟังก์ชันชี้กำลัง $y = a^x$ โดยที่ $a > 0$ และ $a \neq 1$ นั่นคือฟังก์ชันชี้กำลังนั้นต้องมีฐานเป็นจำนวนจริงบวกที่ไม่เท่ากับ 1 ทั้งนี้เพราะว่าถ้าฐานเท่ากับ 1 แล้วฟังก์ชัน $y = a^x$ คือ $y = 1^x = 1$ ซึ่งฟังก์ชันดังกล่าวมีกราฟเป็นเส้นตรงขนานกับแกน x ซึ่งเราได้ศึกษามาแล้วในหัวข้อที่ผ่านมา และเราสามารถใช้อุทฤษฏีบทต่าง ๆ เพื่อช่วยแก้สมการชี้กำลัง ส่วนอินเวอร์สฟังก์ชันเลขชี้กำลัง ซึ่งเขียนได้ในรูป $x = a^y$ เรียกว่าฟังก์ชันลอการิทึม ดังนั้นจะมีสมการเป็น $x = a^y$ แต่เนื่องจาก $x = a^y$ เราไม่สามารถใช้ความรู้ทางพีชคณิต มาทำให้สมการการดังกล่าวอยู่ในรูปฟังก์ชันชัดแจ้งได้ดังนั้นจึงกำหนดสัญลักษณ์ใหม่ขึ้นมาแทน $x = a^y$ ซึ่งใช้สัญลักษณ์ $y = \log_a x$ นั่นเองทั้งนี้เราก็สามารถใช้คุณสมบัติ และทฤษฎีบทต่าง ๆ เพื่อแก้สมการในรูปแบบลอการิทึมได้

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 5

1. จงเขียนกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$1.1 \quad y = 3^x$$

$$1.2 \quad y = 3^{|x|}$$

$$1.3 \quad y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

$$1.4 \quad y = \left(\frac{1}{4}\right)^{|x|}$$

2. จงหาคำตอบของสมการต่อไปนี้

$$2.1 \quad 3^x = 3^{2x+1}$$

$$2.2 \quad 5^{x-1} = 0$$

$$2.3 \quad 5^{-x} = 125$$

$$2.4 \quad 2^{x(x-1)} = 8$$

$$2.5 \quad 3^{x(x+4)} = 3^{-4}$$

$$2.6 \quad 3^x = 9^{x+1} \cdot 27^{1-2x}$$

$$2.7 \quad 5^{2x+1} = 25^x \cdot 5^{3x}$$

3. จงเขียนกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$3.1 \quad y = \log_3 x$$

$$3.2 \quad y = \log_{\frac{1}{3}} x$$

$$3.3 \quad y = \log_7 x$$

$$3.4 \quad y = \log_{\frac{1}{7}} x$$

$$3.5 \quad y = \log x$$

$$3.6 \quad y = \ln x$$

4. จงหาคำตอบของสมการต่อไปนี้

$$4.1 \quad \log_4 x = -\frac{1}{2}$$

$$4.2 \quad \log_5 x = 3$$

$$4.3 \quad \log_3 \left(x - \frac{2}{3} \right) = -1$$

$$4.4 \quad \log_2 (x^2 + x + 2) = 3$$

$$4.5 \quad \log_x 8 = 3$$

$$4.6 \quad \log_3 \left(\frac{2}{x+1} \right) = \log_3 (x+2)$$

$$4.7 \quad \log_4 (3-x) = \log_2 (2x)$$

$$4.8 \quad \log_3 x = \log_{3^2} (3x+4)$$

$$4.9 \quad \log_3 3^{(x+1)} = \log_3 5^{2x}$$

$$4.10 \quad \log_2 (x^2 + 2x) = 3 \log_{10^2} x = 3 x^{\log_2 x}$$

เอกสารอ้างอิง

คณาจารย์ Think Beyond Genius. (2558). UNHATE MATH : สรุปลัทธิคณิตศาสตร์ ม. ปลาย

ฉบับสมบูรณ์. กรุงเทพมหานคร : ริงค์ ปียอนด์ บุ๊คส์ จำกัด.

สมัย เหล่าวานิชย์ และพัชรพร เหล่าวานิชย์. (2521). คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 3.

ไฮเอ็ดพับลิชชิง จำกัด.

สุกัญญา สนิทวงศ์ ณ อยุธยา และอนัญญา อภิชาติบุตร. (2551). แคลคูลัส 2. กรุงเทพมหานคร :

ไฮเอ็ดพับลิชชิง.

สุเทพ ทองอยู่ และสุเทพ จันทร์สมศักดิ์. (2535). คณิตศาสตร์รวม ม.4-5-6 เล่ม 1. ภูมิบัณฑิต.

บรรณานุกรม

- กมล เอกไทเจริญ. (2552). **คณิตศาสตร์ ม.3 เล่ม 1**. กรุงเทพมหานคร : ไฮเอ็ดพับลิชชิง จำกัด.
- แก้ว สงขาว และคณะ. (2553). **พจนานุกรมศัพท์คณิตศาสตร์ฉบับราชบัณฑิตยสถาน**.
กรุงเทพมหานคร : นานมีบุ๊คส์พับลิเคชันส์.
- คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง. (2542). **แคลคูลัสและ
เรขาคณิตวิเคราะห์ 1**. พิมพ์ครั้งที่ 8 กรุงเทพมหานคร : มหาวิทยาลัยรามคำแหง.
- คณาจารย์ Think Beyond Genius. (2558). **UNHATE MATH : สรุปหลักคณิตศาสตร์ ม. ป้าย
ฉบับสมบูรณ์**. กรุงเทพมหานคร : ธิงค์ บียอนด์ บุ๊คส์ จำกัด.
- จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. (2551). **คู่มือเตรียมสอบ O-NET กลุ่มสาระคณิตศาสตร์**.
กรุงเทพมหานคร : พ.ศ. พัฒนาจำกัด
- จารุณี สุตะบุตร และคณะ. (2533). **หนังสือเรียนคณิตศาสตร์ 4**. กรุงเทพมหานคร : ครูสภาลาดพร้าว.
- จรัส อินสม และประทีป โรจนวิภาต. (2550). **คู่มือคณิตศาสตร์พื้นฐาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2
ภาคเรียนที่ 2**. กรุงเทพมหานคร : แม็ค.
- จินดา อยู่เป็นสุข. (2551). **คณิตศาสตร์เพิ่มเติมเล่ม 2 ม.4-6**. กรุงเทพมหานคร : ภูมิบัณฑิตการพิมพ์.
- ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. (2555). **คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม.5**. กรุงเทพมหานคร : แม็ค.
- ปราณี เจริญกิจวัฒนะ และลัดดาวัลย์ เพ็ญสุภา. (2530). **คณิตศาสตร์ทั่วไป**. กรุงเทพมหานคร :
สำนักประกายพริก.
- ปิยรัตน์ จาตุรันตบุตร. (2547). **หลักการคณิตศาสตร์**. กรุงเทพมหานคร : ด้านสุทธาการพิมพ์.
- พลอนันต์แสงประสิทธิ์. (2554). **คณิตศาสตร์ม.ปลาย**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์เดอะบุคส์
- ภัทรา เตชาภิวัตย์. (2540). **เรขาคณิตวิเคราะห์**. กรุงเทพมหานคร : มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.
- รณชัย มาเจริญทรัพย์. (2551). **คณิตศาสตร์เพิ่มเติม เล่ม 1**. กรุงเทพมหานคร : ภูมิบัณฑิตการพิมพ์.
- เลิศ สิทธิโกศล. (2541). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1**. กรุงเทพมหานคร : สกายบุคส์.
- เวชชัย สังข์สาย. (2536). **คณิตศาสตร์พื้นฐาน**. สุรินทร์ : ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ
วิทยาลัยครูสุรินทร์.
- ศุภกิจ เฉลิมวิสุตกุล. (2553). **คณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4**. กรุงเทพมหานคร : แม็ค.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2546). **หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม
คณิตศาสตร์ เล่ม 1 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ มัธยมศึกษาปีที่ 4**. กรุงเทพมหานคร
: สำนักพิมพ์คุรุสภา.
- สมัย เหล่าวานิชย์ และพัชรพรณ เหล่าวานิชย์. (2521). **คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 3**.
ไฮเอ็ดพับลิชชิง จำกัด.

สุกัญญา สนิทวงศ์ ณ อยุธยา และอนัญญา อภิชาติบุตร. (2551). **แคลคูลัส 2**. กรุงเทพมหานคร : ไฮเอ็ดพับลิชชิง.

สุชิน ทำมาหากิน. (2540). **คู่มือคณิตศาสตร์ ม.3**. กรุงเทพมหานคร : มิตรสัมพันธ์ กราฟฟิคอาร์ต.

สุเทพ จันทร์สมศักดิ์. (2533). **ระบบจำนวน**. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

สุเทพ ทองอยู่ และสุเทพ จันทร์สมศักดิ์. (2533). **คณิตศาสตร์ ม.4 เล่ม 1**. ภูมิบัณฑิต.

_____. (2535). **คณิตศาสตร์รวม ม.4-5-6 เล่ม 1**. ภูมิบัณฑิต.

สุนทร แสงผล และก่อสุข วีระถาวร. (2541). **เรขาคณิตวิเคราะห์**. กรุงเทพมหานคร :

มหาวิทยาลัยรามคำแหง

อำพล ธรรมเจริญ และอุบลวรรณ เงินจิตร. (2541). **คณิตศาสตร์ไฟไนต์**. กรุงเทพฯ : แมคกรอ-ฮิล
อินเตอร์เนชันแนล เอ็นเตอร์ไพรส์, อิงค์